

Министерство образования Российской Федерации  
Уральский государственный профессионально-педагогический  
университет  
Уральское отделение Российской академии образования

**А.О.Прокубовская, А.Г.Окуловская**

## **КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ**

Учебное пособие

Часть 1

Моделирование электрических цепей

Екатеринбург 2001

УДК 681.3.06 (07)  
ББК 32.97 я7  
П80

**Прокубовская А.О., Окуловская А.Г.** Компьютерное моделирование электронных устройств: Учеб. пособие: В 2 ч. Ч.1: Моделирование электрических цепей. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. проф.-пед. ун-та, 2001. 103 с.

В учебном пособии приведены основные сведения о моделировании электрических цепей и электронных устройств, описаны приемы работы с моделирующим пакетом Electronics Workbench. В первой части рассматриваются особенности моделирования электрических цепей.

Предназначается для студентов компьютерных специализаций и инженерно-технических работников, желающих самостоятельно освоить моделирование электронных устройств средствами пакета Electronics Workbench.

Рецензенты: доктор педагогических наук, профессор Г.Д.Бухарова (Уральский государственный профессионально-педагогический университет); доктор педагогических наук, профессор И.Г.Пустильник (Уральский государственный педагогический университет)

© Уральский государственный  
профессионально-педагогический  
университет, 2001

## Оглавление

<b>Введение</b> .....	<b>5</b>
Модели и моделирование.....	5
Преимущества электрической энергии.....	10
Этапы развития электрической и электронной техники.....	10
Основные понятия и определения.....	11
Классификация электрических цепей.....	13
Топологические понятия теории электрических цепей.....	14
Вопросы для самопроверки.....	15
 <b>Электрические цепи постоянного тока</b> .....	 <b>16</b>
Основные законы.....	16
Методы расчета электрических цепей.....	19
Пример расчета электрических цепей постоянного тока.....	23
Вопросы для самопроверки.....	27
 <b>Однофазные цепи синусоидального тока</b> .....	 <b>29</b>
Общие сведения.....	29
Получение синусоидальной ЭДС.....	29
Основные параметры синусоидально изменяющихся величин.....	30
Представление синусоидального тока в различных формах.....	32
Активное сопротивление, индуктивность, емкость в цепях синусоидального тока.....	35
Последовательное включение активного, индуктивного и емкостного сопротивлений в цепи синусоидального тока. Резонанс напряжений.....	40
Параллельное включение активного, индуктивного и емкостного сопротивлений в цепи синусоидального тока. Резонанс токов.....	44
Мощность цепи синусоидального тока.....	47
Расчет однофазных цепей синусоидального тока символическим методом.....	49
Пример расчета однофазной цепи синусоидального тока.....	49
Вопросы для самопроверки.....	54

<b>Цепи периодического несинусоидального тока.....</b>	<b>56</b>
Основные характеристики несинусоидальных периодических токов и напряжений.....	56
Мощность цепи несинусоидального тока.....	58
Расчет электрической цепи с несинусоидальными ЭДС и токами..	59
Пример расчета однофазной цепи периодического несинусоидального тока.....	60
Вопросы для самопроверки.....	64
<b>Переходные процессы в линейных электрических цепях.....</b>	<b>65</b>
Понятие о переходных процессах.....	65
Законы коммутации.....	66
Независимые и зависимые начальные условия.....	68
Характеристическое уравнение электрической цепи.....	68
Классический метод расчета переходных процессов.....	69
Переходные процессы в RL-цепях постоянного тока.....	70
Заряд и разряд конденсатора.....	73
Расчет переходных процессов в цепях, содержащих активное сопротивление и индуктивность.....	76
Расчет переходных процессов в цепях, содержащих активное сопротивление и емкость.....	80
Вопросы для самопроверки.....	86
Литература.....	88
Приложение.....	89



## **Введение**

### **Модели и моделирование**

Изучение свойств реальных систем, прогнозирование, проектирование будущих больших систем энергетики, разработка устройств управления системами и решение разнообразных задач текущей эксплуатации – все это требует широкого проведения экспериментальных исследований. Данные исследования могут являться опытами «в натуре» – в действительной работающей системе, когда инженер хочет «попробовать и посмотреть»: а что будет, если, скажем, уменьшится напряжение на подстанции, питающей заводы или какой-то крупный район? если уменьшится частота в системе? и т. д. Разумеется, такие вопросы инженер ставит не из любопытства, а из желания знать, как будет вести себя система в ненормальных условиях – условиях, которые могут появиться во время эксплуатации и которые надо иметь в виду при проектировании будущей системы.

При постановке задачи исследования сложных систем необходимо иметь в виду два кардинальных обстоятельства:

1. В процессе изучения сложных объектов не всегда представляется целесообразным непосредственное проведение на них экспериментов. Например, при разработке новых систем управления элементами электрических систем не следует проводить эксперименты сразу же в самих системах из-за возможных больших аварий, которые могут привести к значительным ущербам. Выходом в таких ситуациях становится использование моделей, которые имеют некоторое сходство (необходимое для данного эксперимента) с оригинальным объектом.

2. Не всякие результаты экспериментального исследования являются действительно полезными результатами, «работающими» на достижение цели. Для того чтобы по результатам экспериментов можно было делать надежные выводы относительно свойств изучаемых объектов, необходимо умение правильно поставить эксперимент и обработать его результаты, т.е. придать им удобную для последующего использования форму, исключив при этом влияние ошибок и случайных факторов, могущих исказить полученные результаты и ввести исследователя в заблуждение. Понятие исследования имеет в данном случае весьма широкий смысл. Это может быть исследование чисто экспериментальное, заключающееся в постановке серии опытов на уже действующем объекте («на натуре») или на его модели. Это может быть и чисто аналитическое исследование, при котором экспериментатор меняет параметры изучаемого объекта и для мысленно создаваемых различных условий проводит серии расчетных исследований. (Подобные расчеты проводятся по различным методикам; суть дела от этого не меняется.) Это могут быть и так называемые проектные исследования, когда для какого-либо ответственного сооружения делается не один, а много (4 – 5) проектов, сравниваемых между собой так, чтобы по определенным критериям выбрать наилучший.

Для всех рассматриваемых исследований типично использование моделей, однако при этом данное понятие часто трактуется настолько широко, что утрачивает свое содержание. Смысл же этого понятия можно сформулировать следующим образом.

Модель в традиционном понимании – это то, что на определенном этапе познавательной деятельности заменяет изучаемый объект (аналог, дубликат, образ и т.д.). Процесс создания моделей, или моделирования, состоит в любом воспроизведении объективных законо-

мерностей, свойственных предметам окружающего нас материального мира.

Моделирование может рассматриваться в двух основных аспектах:

1) как познавательный процесс, когда поступающая информация об окружающем мире творчески перерабатывается в сознании человека; при этом создаются образы, отражающие объективные свойства материального мира. Эти образы могут иметь словесную форму, форму математических записей, зарисовок любого типа – все это будут *познавательные модели*;

2) как процесс создания неких материальных объектов – моделей, находящихся в определенном – необходимом для данной конкретной задачи – соответствии с изучаемым объектом, или *оригиналом*.

Существует большое разнообразие моделей, среди которых могут быть выделены в качестве основных физические и аналоговые модели.

*Физические модели* сохраняют полностью (или в основном, наиболее существенном) природу явления в оригинале. В физических моделях процессы протекают в измененных количественных соотношениях. Например, модель электрического генератора большой мощности может быть выполнена в виде электрического генератора малой мощности, но такого, в котором интересующие исследователя процессы протекают подобно процессам в натуральном – «настоящем» – генераторе.

*Аналоговые модели* (иногда их называют «математические модели»), построены на основе некоторого нефизического сходства – аналогии или, обычно в технике, на основе совпадения (формального)

математических уравнений, описывающих процессы в оригинале и в моделирующем объекте. В общем случае физическая природа явлений в модели отличается от природы явлений в оригинале; совпадают только уравнения (и то не обязательно для всего явления; может быть – только для некоторых процессов). Примером математической модели является электрическая схема, процессы в которой моделируют механические колебания маятника в силу того, что процессы в электрической и механической системах описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями.

Кибернетическая модель, которая воспроизводит функциональную зависимость между параметрами, характеризующими внешние воздействия на систему, и параметрами, определяющими реакцию системы на эти внешние воздействия, также является математической моделью. При построении подобной модели явно не учитывается структура системы, физические свойства ее элементов, а принимается во внимание только зависимость «входных» внешних возмущений от «выходных» реакций системы. В этой зависимости и находят своеобразное отражение различные свойства системы.

Под моделированием мы будем понимать исследование объектов познания на их моделях; построение и изучение моделей реально существующих предметов, явлений и устройств для определения, уточнения их характеристик, рационализации способов их производства, воспроизводства, оптимизации их конструктивного решения.

Моделирование всегда используется вместе с другими общенаучными и специальными методами. Прежде всего, моделирование тесно связано с экспериментом. Изучение какого-либо явления на его модели (при предметном, знаковом моделировании, моделировании на компьютере) можно рассматривать как особый вид эксперимента:

«модельный эксперимент» отличается от обычного («прямого») эксперимента тем, что в процесс познания включается «промежуточное звено» – модель, которая является одновременно и средством, и объектом экспериментального исследования, заменяющим изучаемый объект. Модельный эксперимент позволяет исследовать такие объекты, прямой эксперимент над которыми затруднён, экономически невыгоден либо вообще невозможен в силу тех или иных причин.

Дисциплина «Компьютерное моделирование электронных устройств» естественным образом заменила дисциплину «Основы электротехники и электроники» в связи с развитием новых информационных технологий расчета и проектирования электротехнических и электронных устройств. Известно, что при разработке и исследовании различных электронных и электрических устройств основная трудность возникает на стадии составления математической модели для исследуемой установки, поскольку одна и та же установка может иметь разные математические описания в зависимости от задач исследования. Кроме того, часто необходимо определить поведение устройств в нестандартных и аварийных ситуациях, что при работе с натурными образцами может вызвать их значительную поломку – вплоть до разрушения.

Моделирование широко используется при изучении устройств на всех стадиях их разработки в производственных условиях, а также при выполнении научно-исследовательских и лабораторных работ. В рамках дисциплины «Компьютерное моделирование электронных устройств» выполняется моделирование электрических и электронных устройств и анализ результатов. Это позволяет не только познакомить студентов с основами моделирования различных устройств, но и научить их самостоятельно оценивать полученные величины.

## **Преимущества электрической энергии**

Все отрасли современного производства, культуры и бытовая сфера не могут функционировать без применения различных электротехнических устройств. Широкое использование электрической энергии обусловлено :

- относительной простотой производства;
- возможностью практически мгновенно передавать большую энергию на большие расстояния при малых потерях;
- универсальностью (простота преобразования в другие виды энергии);
- легкостью управления электротехническими установками;
- высоким коэффициентом полезного действия электротехнологических установок.

## **Этапы развития электрической и электронной техники**

Историю развития электрической и электронной техники коротко можно представить следующим образом:

- Предыстория (до XVII в.) – обнаружены некоторые электрические и магнитные явления, но природа их неизвестна.
- 1-й этап (XVII – XVIII вв.) – проведены первые исследования электрических и магнитных явлений электрохимии; изобретены гальванометр (Вольт, Италия), большая гальваническая батарея (Петров, Россия).

- 2-й этап (первая половина XIX в.) – определена сущность электромагнитных явлений (тепловое действие тока (Джоуль, Англия и Ленц, Россия); связь между напряжением, током, сопротивлением (Ом, Германия), явление электромагнитной индукции (Фарадей, Англия)); открыты базовые законы (закон электролиза (Фарадей, Англия), закон взаимодействия токов (Ампер, Франция), второй закон Кирхгофа (Германия)).

- 3-й этап (вторая половина XIX в.) – изобретены трансформаторы, электродвигатели, электроаппараты; определены основы их теории и принцип действия.

- 4-й этап (начало XX в. и до наших дней) – осуществлено повсеместное внедрение электротехники в промышленность, транспорт, науку и быт.

### **Основные понятия и определения**

Электрическая цепь – это совокупность устройств и объектов, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью таких понятий, как электродвижущая сила (ЭДС), ток, напряжение, сопротивление.

Элемент электрической цепи – отдельное устройство, входящее в состав электрической цепи и выполняющее в ней определенную функцию.

*Основные элементы электрической цепи – источники и приемники электроэнергии.*

В *источниках* электроэнергии различные виды энергии (химическая – в гальванических элементах, механическая – в генераторах, а

также световая, тепловая) преобразуются в электромагнитную или электрическую энергию.


В приемниках электромагнитная энергия преобразуется в другие виды энергии (в химическую – в гальванических ваннах, в тепловую – в нагревательных приборах, в механическую – в электрических двигателях).

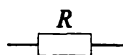
Вспомогательные элементы электрической цепи – резисторы, емкости, индуктивности, выключатели, предохранители, измерительные приборы.


Условные графические обозначения:

 – источник напряжения или ЭДС;


 – гальванический элемент;


 – выключатель;

 – резистор;

 – емкость;

 – индуктивность;

 – амперметр;

 – вольтметр.



Электрические цепи принято изображать в виде различных схем, на которых показываются основные и вспомогательные элементы и их соединения. Различают монтажные, принципиальные схемы и схемы замещения.

На *монтажных* схемах изображают рисунок (эскиз) элементов цепи и соединения проводов, на *принципиальных* – дают условное графическое изображение элементов и схему их соединения. Схема *замещения* – расчетная модель электрической цепи. На ней реальные элементы заменяются идеальными, а все элементы, не влияющие на результаты расчета, исключаются.

### **Классификация электрических цепей**

Электрические цепи принято дифференцировать:

1) по виду тока (цепи постоянного тока, в которых электрический ток не изменяется во времени; цепи переменного тока, включая цепи синусоидального тока и цепи несинусоидального тока). На рис. 1 приведены временные характеристики различных видов токов (*a* – постоянный ток, *b* – переменный синусоидальный ток, *в, г* – переменный несинусоидальный ток);

2) по характеру параметров элементов (линейные цепи, у которых сопротивление не зависит от значений и направлений токов; нелинейные цепи).

3) в зависимости от наличия или отсутствия источника электроэнергии (активные цепи, содержащие источники электроэнергии; пассивные цепи).

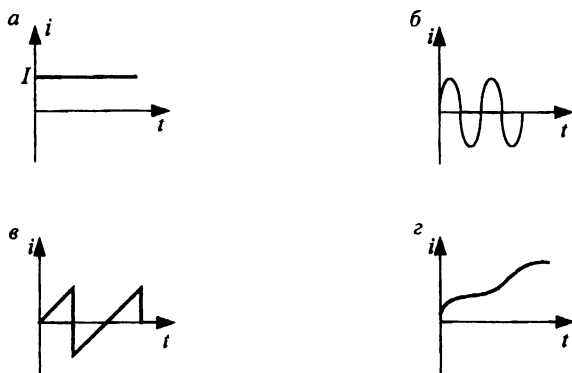


Рис. 1

## Топологические понятия теории электрических цепей

Топологические понятия теории электрических цепей рассмотрим на примере схемы (рис. 2).

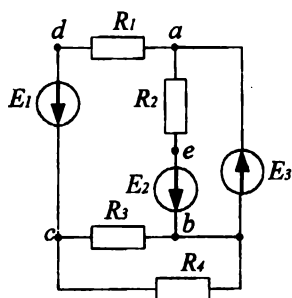


Рис. 2

**Ветвь** электрической цепи – участок, элементы которого соединены друг за другом, т.е. последовательно. Ток в элементах – один и тот же ( $adc$ ,  $aeb$ ).

*Узел* электрической цепи – место соединения ветвей ( $a, b, c$ ).

*Контур* – любой замкнутый путь вдоль ветвей электрической цепи ( $cbadc, dabcd$ ).

### ***Вопросы для самопроверки***

1. Дать определения понятиям «электрическая цепь», «электрическая схема», «узел», «ветвь», «контур», «модель», «моделирование».
2. По каким параметрам дифференцируются электрические цепи?
3. Привести примеры принципиальной электрической схемы и соответствующей ей схемы замещения.

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### Основные законы

Электрические цепи постоянного тока – цепи, в которых протекает электрический ток, не изменяющийся во времени ни по величине, ни по направлению. В электрических цепях действуют следующие основные законы: закон Ома, первый и второй законы Кирхгофа.

1. Закон Ома формулируется как:

- закон Ома для участка цепи без источника: сила тока на участке электрической цепи прямо пропорциональна напряжению на концах этого участка и обратно пропорциональна сопротивлению этого участка (рис. 3):  $I = \frac{U}{R}$ ;

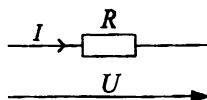


Рис. 3

- обобщенный закон Ома для участка цепи с ЭДС (рис. 4): если направление тока в ветви совпадает с направлением ЭДС источника (рис. 4,а), то

$$U_{ab} = U_R - E;$$

$$U_R = IR;$$

$$U_{ab} = IR - E;$$

$$I = \frac{U_{ab} + E}{R};$$

если направление тока в ветви не совпадает с направлением ЭДС источника (рис. 4,б), то  $I = \frac{U_{ab} - E}{R}$ .



Рис. 4

2. Законы Кирхгофа формулируются следующим образом (рис. 5):

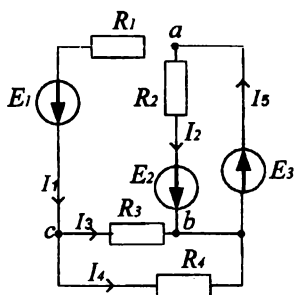


Рис. 5

- первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма токов в узле электрической цепи равна нулю, при этом токи, одинаково направленные относительно узла, записываются с одинаковым знаком. Для узла  $a$

$$I_1 + I_2 - I_5 = 0;$$

- второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма падений напряжений любого контура равна алгебраической сумме ЭДС этого контура.

*Правило знаков:* падение напряжения записывается со знаком «+», если направление тока совпадает с направлением обхода контура; ЭДС записывается со знаком «+», если направления ЭДС и обхода контура совпадают.

Рассмотрим схему электрической цепи, приведенную на рис. 5. Направление обхода контура  $abca$  выберем по часовой стрелке. Тогда уравнение второго закона Кирхгофа будет иметь следующий вид:

$$-E_1 + E_2 = I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_1 R_1.$$

В электрических цепях соблюдается баланс мощности. Мощность характеризует интенсивность преобразования энергии одного вида в энергию другого вида за единицу времени.

Для цепи постоянного тока мощность источника вычисляется как  $P_{ист} = EI$ , а приемника – как  $P_{пр} = I^2 R$ , ( $[P] = \text{Вт}$ ). На основании закона сохранения энергии мощность, развиваемая источниками электроэнергии, должна быть равна сумме мощностей всех приемников и потерь в источниках из-за внутренних сопротивлений. При этом если направления ЭДС и тока совпадают, то  $EI$  в сумме записываются со знаком «+». Для схемы (см. рис. 5) при выбранных направлениях токов

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_5 I_5 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4.$$

## Методы расчета электрических цепей

*Постановка задачи:* в известной схеме цепи с заданными параметрами необходимо рассчитать токи, напряжения, мощности на отдельных участках. Для этого можно использовать следующие методы:

- метод преобразования цепи;
- непосредственного применения законов Кирхгофа;
- контурных токов;
- узловых потенциалов;
- наложения;
- метод эквивалентного генератора.

Мы будем рассматривать первые два метода.

1. Метод преобразования цепи. Суть метода: если несколько последовательно и (или) параллельно включенных сопротивлений заменить одним, то распределение токов в электрической цепи не изменится. Рассмотрим все случаи включения сопротивлений:

1) Последовательное соединение резисторов. Сопротивления включены таким образом, что начало следующего сопротивления подключается к концу предыдущего (рис. 6).

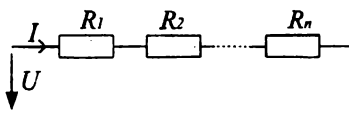


Рис. 6

Ток во всех последовательно соединенных элементах одинаков.

Заменим все последовательно соединенные резисторы одним эквивалентным  $R_{\text{экв}}$ . (рис. 7).

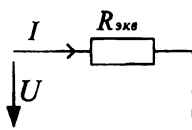


Рис. 7

По второму закону Кирхгофа

$$U = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) I = R_{\text{экв.}} I;$$

$$R_1 + R_2 + \dots + R_n = R_{\text{экв.}},$$

т.е. при последовательном соединении резисторов эквивалентное сопротивление участка цепи равно сумме всех последовательно включенных сопротивлений.

2) Параллельное соединение резисторов. В этом случае соединяются вместе одноименные зажимы резисторов (рис. 8).

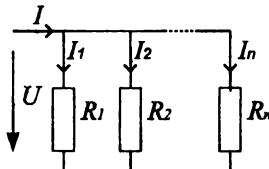


Рис. 8

Все элементы присоединяются к одной паре узлов. Поэтому ко всем элементам приложено одно и то же напряжение  $U$ .

По первому закону Кирхгофа

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n.$$

По закону Ома

$$I_k = \frac{U_k}{R_k}.$$



Тогда

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n} = U \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right).$$

Для эквивалентной схемы (см. рис. 7):

$$I = \frac{U}{R_{\text{экв.}}};$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \frac{1}{R_{\text{экв.}}}.$$

Величина  $\frac{1}{R}$ , обратная сопротивлению, называется проводимостью  $G$ .

$$G = \frac{1}{R};$$

$$G_1 + G_2 + \dots + G_n = G_{\text{экв.}}$$

Проводимость измеряется в Сименсах:  $[G] = \text{Сименс (См)}$ .

*Частный случай:* параллельно соединены два резистора (рис. 9).

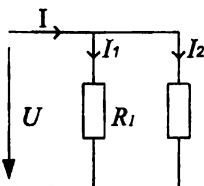


Рис. 9

$$\frac{1}{R_{\text{экв}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2};$$

$$R_{\text{экв.}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

3) Взаимное преобразование «звезды» (рис.10, а) и «треугольника» сопротивлений (рис. 10, б).

- преобразование «звезды» сопротивлений в «треугольник»:

$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a R_b}{R_c};$$

$$R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b R_c}{R_a};$$

$$R_{ca} = R_c + R_a + \frac{R_c R_a}{R_b}.$$

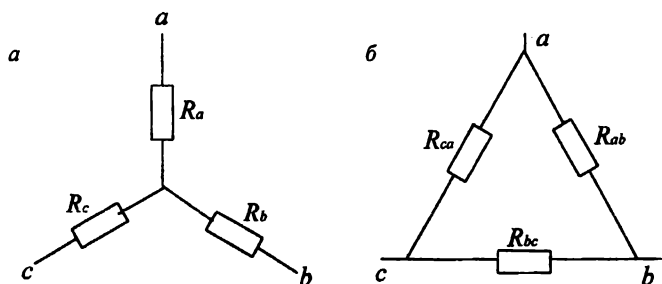


Рис. 10

- преобразование «треугольника» сопротивлений в «звезду»:

$$R_a = \frac{R_{ab} R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}};$$

$$R_b = \frac{R_{bc} R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}};$$

$$R_c = \frac{R_{ca} R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}.$$

## 2. Метод непосредственного применения законов Кирхгофа.

*Порядок расчета:*

- 1) определить число ветвей (т.е. токов) и узлов в схеме;

2) произвольно выбрать условно-положительные направления токов. Общее число уравнений должно быть равно числу неизвестных токов;

3) определить, сколько уравнений должно быть составлено по первому закону Кирхгофа, а сколько – по второму закону Кирхгофа;

4) составить уравнения для  $(N_y - 1)$  узлов по первому закону Кирхгофа и для  $N_k - (N_y - 1)$  независимых контуров, отличающихся друг от друга хотя бы на одну ветвь, по второму закону Кирхгофа;

5) решить систему уравнений относительно токов. Если в результате ток получился отрицательным, то его действительное направление противоположно выбранному;

6) проверить правильность решения задачи, составив уравнение баланса мощности и смоделировав электрическую цепь средствами моделирующего пакета Electronics Workbench.

*Примечание.* Если есть возможность, то перед составлением системы уравнений по законам Кирхгофа следует преобразовать «треугольник» сопротивлений в соответствующую «звезду».

### **Пример расчета электрических цепей постоянного тока**

Расчет будем выполнять с применением законов Кирхгофа, предварительно преобразовав «треугольник» сопротивлений в «звезду».

*Постановка задачи:* определить токи в цепи, если  $E_1=160$  В,  $E_2=100$  В,  $R_3=100$  Ом,  $R_4=100$  Ом,  $R_5=150$  Ом,  $R_6=40$  Ом (рис. 11).

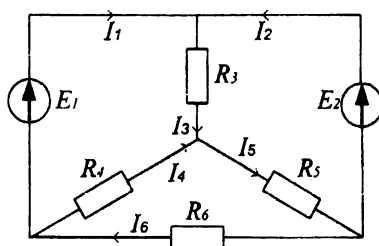


Рис. 11

*Порядок расчета:*

Преобразуем «треугольник» сопротивлений  $R_4$   $R_5$   $R_6$  (рис. 12, а) в «звезду» сопротивлений  $R_{45}$   $R_{56}$   $R_{64}$  (рис. 12, б), предварительно указав условные положительные направления токов в цепи:

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{100 \cdot 150}{100 + 150 + 40} = 51,72 \text{ Ом};$$

$$R_{56} = \frac{R_5 R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{150 \cdot 40}{100 + 150 + 40} = 20,69 \text{ Ом};$$

$$R_{64} = \frac{R_4 R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{100 \cdot 40}{100 + 150 + 40} = 13,79 \text{ Ом}.$$

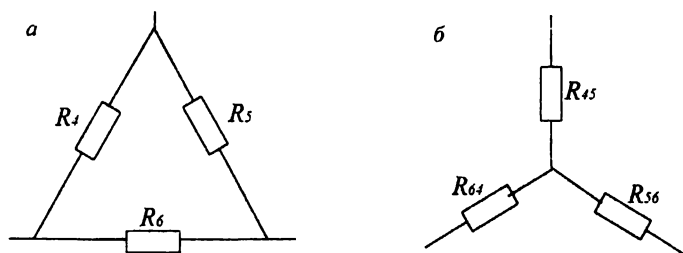


Рис. 12

После преобразования электрическая цепь примет вид, отображенный на рис. 13 (в непреобразованной части электрической цепи направления токов не изменятся).

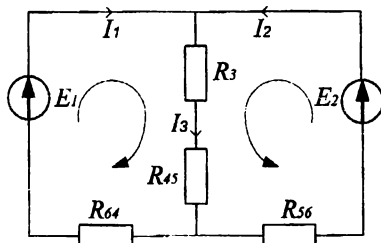


Рис. 13

В полученной электрической цепи 2 узла, 3 ветви, 2 независимых контура, следовательно, в цепи протекают три тока (по количеству ветвей). Необходимо составить систему трех уравнений, из которых одно уравнение – по первому закону Кирхгофа (на 1 меньше, чем узлов в схеме электрической цепи) и два уравнения – по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ E_1 = I_1 R_{64} + I_3 (R_3 + R_{45}), \\ E_2 = I_2 R_{56} + I_3 (R_3 + R_{45}). \end{cases}$$

Подставим в полученную систему уравнений известные значения ЭДС и сопротивлений:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ 160 = I_1 \cdot 13,79 + I_3 \cdot (100 + 51,72), \\ 100 = I_2 \cdot 20,69 + I_3 \cdot (100 + 51,72). \end{cases}$$

Решая систему уравнений любым способом, определяем токи схемы электрической цепи (см. рис. 13):

$$I_1 = 2,29 \text{ A}; I_2 = -1,44 \text{ A}; I_3 = 0,85 \text{ A}.$$

Переходим к исходной схеме (см. рис. 11). По второму закону Кирхгофа

$$E_1 = I_3 R_3 - I_4 R_4;$$

$$I_4 = \frac{I_3 R_3 - E_1}{R_4} = \frac{100 \cdot 0,85 - 160}{100} = -0,75 \text{ A}.$$

По первому закону Кирхгофа

$$I_3 + I_4 - I_5 = 0;$$

$$I_5 = I_3 + I_4 = 0,85 + (-0,75) = 0,1 \text{ A};$$

$$I_1 + I_4 - I_6 = 0;$$

$$I_6 = I_1 + I_4 = 2,29 + (-0,75) = 1,54 \text{ A}.$$

Токи  $I_2$  и  $I_4$  получились отрицательными, следовательно, их действительное направление противоположно выбранному нами (рис. 14).

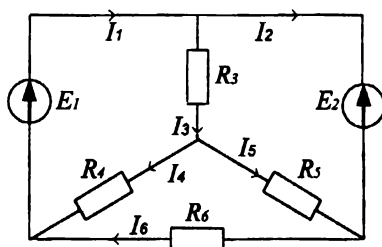


Рис. 14

Правильность решения проверяем, составив уравнение баланса мощности. Мощность источников (учтем, что ЭДС источника  $E_2$  направлена встречно току  $I_2$ , протекающему через него) вычисляем как

$$E_1 I_1 - E_2 I_2 = 160 \cdot 2,29 - 100 \cdot 1,44 = 222,4 \text{ Вт}.$$

Находим мощность потребителей:

$$I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 = \\ = 0,85^2 \cdot 100 + 0,75^2 \cdot 100 + 0,1^2 \cdot 150 + 1,54^2 \cdot 40 = 224,86 \text{ Вт.}$$

Погрешность вычислений – в пределах допустимого (меньше 5%).

Смоделируем электрическую цепь (см. рис. 11) средствами моделирующего пакета Electronics Workbench (рис. 15).

При сравнении расчетных результатов и результатов моделирования можно увидеть, что они различаются (не более чем на 5%), так как измерительные приборы имеют внутренние сопротивления, которые моделирующая система учитывает.

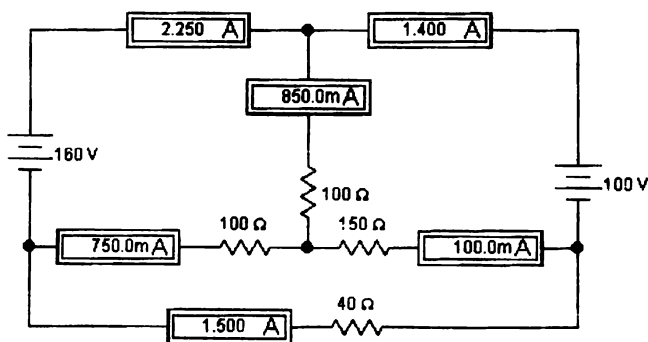


Рис. 15

### **Вопросы для самопроверки**

1. Как выбирают положительные направления токов и связанных с ними падений напряжения на сопротивлениях?

2. Сформулировать закон Ома для участка цепи, содержащей ЭДС, первый и второй законы Кирхгофа.
3. На каком законе основано уравнение баланса мощности?
4. Могут ли в электрической цепи постоянного тока источники ЭДС работать в режиме потребителя? Ответ аргументировать.
5. Привести примеры электрических цепей, в которых целесообразно перед расчетом преобразовать «треугольник» сопротивлений в «звезду» и «звезду» сопротивлений в «треугольник».
6. Чем могут быть объяснены расхождения в результатах при аналитическом расчете электрической цепи и моделировании?



## ОДНОФАЗНЫЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

### Общие сведения

Преимущества переменного тока по сравнению с постоянным:

1. Производство, передача и использование электроэнергии – наиболее экономичны.
2. Можно относительно просто преобразовывать напряжения при сохранении формы кривой.
3. Наиболее распространенными являются электродвигатели синусоидального тока – асинхронные двигатели.

### Получение синусоидальной ЭДС

Пусть рамка вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  в однородном магнитном поле (рис. 16).

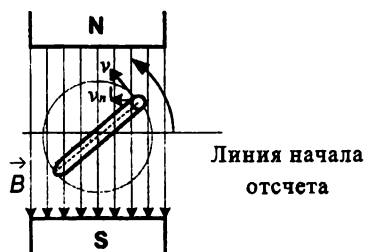


Рис. 16

По закону электромагнитной индукции, в каждом проводнике рамки будет наводиться изменяющаяся ЭДС:

$$e = Blv_n,$$

где  $B$  – магнитная индукция;

$l$  – длина проводника;

$v_n$  – скорость пересечения проводником магнитных линий.

Если  $v$  – линейная скорость проводника, то  $v_n = v \cdot \sin(\omega t + \varphi_e)$ ;

здесь  $\omega t$  – угол поворота витка за время  $t$ . Тогда

$$e = Blv \cdot \sin(\omega t + \varphi_e) = E_m \sin(\omega t + \varphi_e),$$

где  $E_m$  – амплитуда ЭДС (рис. 17).

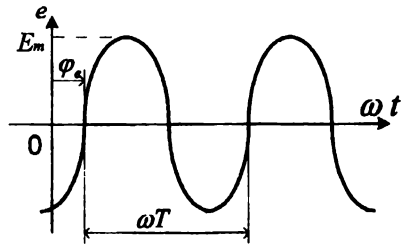


Рис. 17

### Основные параметры синусоидально изменяющихся величин

В линейных цепях синусоидального тока напряжение, ЭДС, ток изменяются по синусоидальному закону:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u);$$

$$e = E_m \sin(\omega t + \varphi_e);$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i),$$

где  $u, e, i$  – мгновенные значения (значения в данный момент времени);

$\omega t + \varphi_u, \omega t + \varphi_e, \omega t + \varphi_i$  – фаза (фазовый угол).

Фаза отсчитывается от точки перехода синусоидальной функции через ноль к положительному значению (рис. 18):

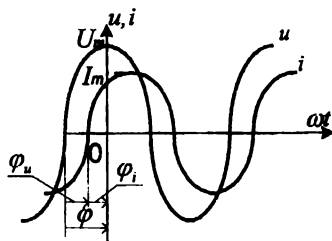


Рис. 18

- $I_m, U_m, E_m$  – амплитуды, т.е. максимальное значение синусоидальных величины;
- $\omega$  – угловая частота ( $c^{-1}$ );
- $\varphi_u, \varphi_e, \varphi_i$  – начальная фаза, или значение аргумента функции в начальный момент времени;
- $T$  – период, т. е. наименьший интервал времени, через который мгновенные значения величины повторяются;
- $f$  – частота (Гц) – число периодов в секунду ( $f = \frac{1}{T}$ );
- $\varphi$  – сдвиг фаз между напряжением и током ( $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ ).

При  $\varphi > 0$ ,  $\varphi_u > \varphi_i$  напряжение опережает ток (ток отстает от напряжения); при  $\varphi < 0$ ,  $\varphi_u < \varphi_i$  ток опережает напряжение (напряжение отстает от тока).

$U, I, E$  – действующие значения:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}; \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}; \quad E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}.$$

Физический смысл действующего значения однофазного синусоидального тока заключается в следующем: это такой постоянный ток, который за то же время, проходя через то же сопротивление, выделяет такое же количество тепла, что и данный синусоидальный ток.

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

### Представление синусоидального тока в различных формах

Как правило, рассматриваются четыре способа представления синусоидального тока: аналитический, графический, посредством векторов и комплексных чисел. Рассмотрим эти способы на примере сложения двух токов одинаковой частоты (из курса математики известно, что сумма двух синусоид одинаковой частоты – тоже синусоида):

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_{11});$$

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_{12});$$

$$i_1 + i_2 = i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i).$$

1. Аналитический способ представления синусоидального тока заключается в том, что ток записывается как функция времени. Сумма двух синусоидальных токов одинаковой частоты – синусоидальный ток такой же частоты, параметры которого определяются следующим образом:

$$I_m = \sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2 - 2I_{m1}I_{m2} \cos(\varphi_{11} - \varphi_{12})};$$

$$\varphi_i = \operatorname{tg} \frac{I_{1m} \sin \varphi_{i1} + I_{2m} \sin \varphi_{i2}}{I_{1m} \cos \varphi_{i1} + I_{2m} \cos \varphi_{i2}}.$$

Если необходимо сложить более двух токов (или вычесть из одного тока другие), то формулы получаются очень сложные, поэтому пользоваться этим способом представления синусоидальных токов неудобно.

2. При графическом способе представления синусоидальных токов токи изображаются в виде графиков; сложение происходит по точкам. Следовательно, этот способ является приближенным, что не всегда допустимо.

3. Способ представления синусоидальных токов посредством векторов (рис. 19) основан на том, что любую функцию, изменяющуюся во времени по синусоидальному закону, можно представить в виде вращающегося с постоянной частотой вектора.

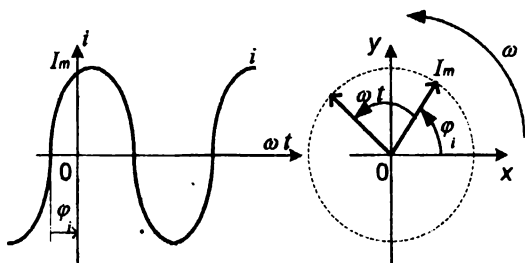


Рис. 19

В прямоугольной системе координат отложим вектор  $I_m$ , длина которого равна амплитуде, а угол наклона к оси абсцисс – начальной фазе тока  $\varphi_i$ . Его проекция на ось ординат равна мгновенному значению тока в момент  $t = 0$ :  $i(0) = I_m \sin \varphi_i$ .

Будем вращать вектор  $I_m$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$  против часовой стрелки, тогда через время  $t$  его проекция на ось ор-

динат будет равна мгновенному значению синусоидального тока:

$$I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = i.$$

В электротехнике изображают неподвижные векторы в момент времени  $t = 0$ , причем их длина должна быть равна не амплитуде, а действующему значению.

4. Способ представления синусоидального тока посредством комплексных чисел обусловлен тем, что, как известно из курса математики, любую синусоидально изменяющуюся величину можно изобразить в виде радиуса-вектора длиной  $I$ , составляющего с осью действительных чисел угол  $\varphi_i$  (рис. 20, а). Его проекция на ось действительных чисел  $I' = I \cos \varphi_i$ , проекция на ось мнимых чисел  $I'' = I \sin \varphi_i$ . Тогда вектор тока может быть записан как

$$I = I' + jI'' = Ie^{j\varphi_i},$$

где  $I$  – модуль комплексного числа, его действующее значение;

$\varphi_i$  – фаза;

$e^{j\alpha}$  – поворотный множитель, оператор поворота (умножение вектора на этот множитель равносильно его повороту на комплексной плоскости на угол  $\angle \alpha$ ) (рис. 20, б).

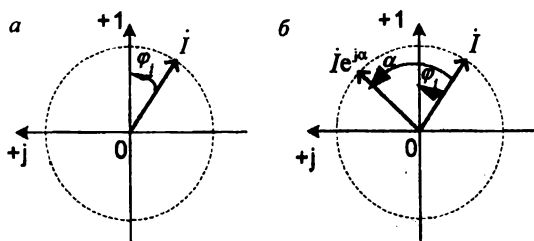


Рис. 20

Для анализа электрических цепей часто используются векторные диаграммы (рис. 21, а). Совокупность векторов ЭДС, напряжений, токов, изображенных в общей системе координат, называется векторной диаграммой. Векторная диаграмма дает наглядное представление о действительных значениях, начальных фазах и углах сдвига фаз.

Взаимное расположение векторов зависит не от начальных фаз, а от угла сдвига фаз (рис.21, б).

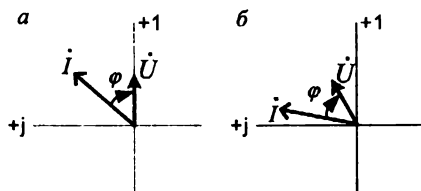


Рис. 21

### Активное сопротивление, индуктивность, емкость в цепях синусоидального тока

1. Дана цепь с резистором (рис. 22).

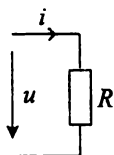


Рис. 22

Пусть приложенное напряжение изменяется по закону  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ . Определить закон изменения тока через резистор  $i$ .

Согласно закону Ома, для участка цепи, содержащего резистор:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \varphi_u) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i);$$

$$\frac{U_m}{R} = I_m; \quad \varphi_i = \varphi_u; \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0,$$

следовательно, ток и напряжение на резисторе совпадают по фазе.

$$\frac{U_m}{\sqrt{2}} = U; \quad \frac{I_m}{\sqrt{2}} = I - \text{действующие значения напряжения и тока.}$$

Закон Ома для действующих значений напряжения и тока на резисторе может быть выражен как  $I = \frac{U}{R}$ .

Перейдем к комплексным выражениям тока и напряжения:

$$\dot{U} = Ue^{j\varphi_u}; \quad \dot{I} = Ie^{j\varphi_i};$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Ie^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Re^{j0} = R.$$

Закон Ома в комплексной форме для цепи с активным сопротивлением запишем как  $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R}$ .

Векторная диаграмма для участка цепи синусоидального тока, содержащего активное сопротивление, показана на рис. 23.

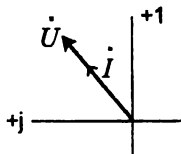


Рис. 23



2. Дана цепь с индуктивностью (рис. 24).

Пусть приложенное напряжение изменяется по закону  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ . Определить закон изменения тока через индуктивность  $i$ .

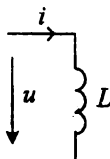


Рис. 24

По закону электромагнитной индукции:

$$u = L \frac{di}{dt}; u dt = L di; di = \frac{u}{L} dt;$$

$$\begin{aligned} i &= \int \frac{u}{L} dt = \frac{1}{L} \int U_m \sin(\omega t + \varphi_u) dt = \frac{U_m}{\omega L} (-\cos(\omega t + \varphi_u) + A) = \\ &= \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \varphi_u - 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i). \end{aligned}$$

$A=0$  (постоянная интегрирования), так как ток должен быть синусоидальным и не должен иметь постоянную составляющую.

$I_m = \frac{U_m}{\omega L}$ , так как  $\omega L = \frac{U}{I}$ , то это индуктивное сопротивление.

$$I = \frac{U}{\omega L}, \text{ где } x_L = \omega L; [\omega L] = \frac{B}{A} = \text{Ом}.$$

$$\varphi_i = \varphi_u - 90^\circ; \varphi = \varphi_u - \varphi_i = 90^\circ.$$

Ток на участке цепи синусоидального тока, содержащем индуктивность, отстает от напряжения на угол  $90^\circ$ .

Перейдем к комплексам тока и напряжения:

$$\dot{U} = Ue^{j\varphi_u}; \quad \dot{I} = Ie^{j\varphi_i};$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Ie^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = x_L e^{j90^\circ} = jx_L.$$

Закон Ома для участка цепи, содержащего индуктивность, в комплексной форме, можно сформулировать как  $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{jx_L}$ , где  $jx_L$  – индуктивное сопротивление в комплексной форме.

Векторная диаграмма для участка цепи, содержащего индуктивность, показана на рис. 25.

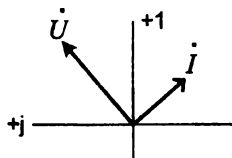


Рис. 25

3. Дана цепь с емкостью (рис. 26).

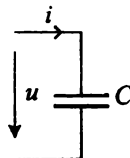


Рис. 26

Пусть приложенное напряжение изменяется по закону  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ . Определить закон изменения тока через емкость  $i$ .

Так как электрический ток, протекающий через конденсатор, есть скорость изменения заряда на его обкладках, то

$$\begin{aligned}
 i &= \frac{dQ}{dt} = \frac{d(UC)}{dt} = C \frac{dU}{dt} = C \frac{d}{dt} (U_m \sin(\omega t + \varphi_u)) = \\
 &= C \omega U_m \cos(\omega t + \varphi_u) = C \omega U_m \sin(\omega t + \varphi_u + 90^\circ) = \\
 &= I_m \sin(\omega t + \varphi_u + 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i);
 \end{aligned}$$

$$I_m = C \omega U_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U_m}{x_C}.$$

Емкостное сопротивление вычисляем как  $x_C = \frac{1}{\omega C}$ .

Закон Ома для действующих значений тока и напряжения на участке цепи, содержащем емкость, описываем как  $I = \frac{U}{x_C}$ .

Ток, протекающий через емкость, опережает напряжение на угол  $90^\circ$ .

Перейдем к комплексам напряжений и токов:

$$\frac{\dot{U}}{I} = \frac{U e^{j\varphi_u}}{I e^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = x_C e^{-j90^\circ} = -j x_C.$$

Закон Ома в комплексной форме может быть сформулирован как

$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{-j x_C}$ , где  $(-j x_C)$  – емкостное сопротивление в комплексной форме.

Векторная диаграмма для участка цепи, содержащего емкость, приведена на рис. 27.

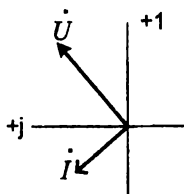


Рис. 27

## Последовательное включение активного, индуктивного и емкостного сопротивлений в цепи синусоидального тока. Резонанс напряжений

*Постановка задачи:* пусть приложенное напряжение изменяется по закону:  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ . Участок цепи содержит последовательно включенные резистор сопротивления  $R$ , индуктивность  $L$ , емкость  $C$  (рис. 28). Определить закон изменения тока на этом участке цепи.

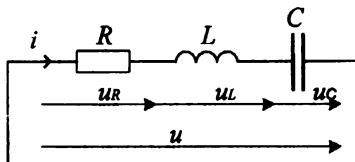


Рис. 28

По второму закону Кирхгофа,  $u = u_R + u_L + u_C$  или, в комплексной форме,  $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$ . Подставим в эту формулу выражения для падений напряжения в различных элементах:

$$\dot{U}_R = \dot{I} R; \dot{U}_L = \dot{I} jx_L; \dot{U}_C = \dot{I} (-jx_C);$$

$$\dot{U} = \dot{I} R + \dot{I} jx_L + \dot{I} (-jx_C) = \dot{I} (R + jx_L - jx_C) = \dot{I} \underline{Z}.$$

Комплексное сопротивление цепи вычисляем как  $\underline{Z} = R + jx_L - jx_C$ .

Отсюда  $\underline{Z} = R + j(x_L - x_C) = R + jx$ , где  $x$  – реактивное сопротивление.

Представим комплексное сопротивление в показательной форме:

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi}, \quad Z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{x_L - x_C}{R},$$

где  $Z$  – модуль комплексного сопротивления; полное сопротивление цепи;

$\varphi$  – аргумент (фаза) сопротивления.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Ie^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Ze^{j\varphi}.$$

Векторная диаграмма приведена на рис. 29.

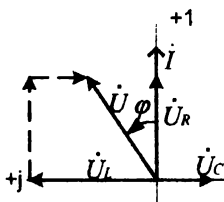


Рис. 29

**Выводы:**

1. Для цепи с последовательным соединением  $R, L, C$  справедлив закон Ома, согласно которому  $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$ .

2. Угол сдвига фаз между напряжением и током равен аргументу комплексного сопротивления. Знак угла сдвига определяется знаком реактивного сопротивления:

- $x > 0, x_L > x_C$  – участок имеет активно-индуктивный характер, ток отстает от напряжения на угол, меньший  $90^\circ$  (см. рис. 29).

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2};$$

$$\varphi = \arctg \frac{U_L - U_C}{U_R}.$$

- $x < 0$ ,  $x_L < x_C$  – участок имеет активно-емкостный характер, ток опережает напряжение на угол, меньший  $90^\circ$  (рис. 30).

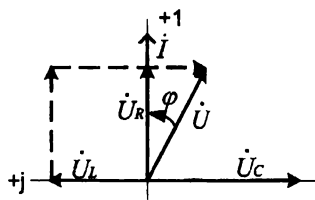


Рис. 30

- $x = 0$ ,  $x_L = x_C$  – участок имеет активный характер, ток и напряжение совпадают по фазе (рис. 31). В цепи наблюдается резонанс напряжений.

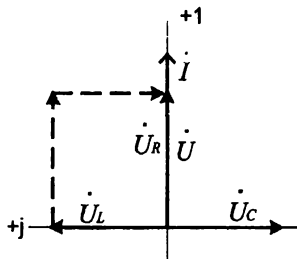


Рис. 31

Резонансом в электрических цепях называется режим участка цепи, содержащий индуктивный и емкостный элементы, при котором угол сдвига фаз между напряжением и током равен  $0^\circ$ . Различают:

- резонанс напряжений – при последовательном соединении элементов;
- резонанс токов – при параллельном соединении элементов.

При последовательном соединении элементов (см. рис. 31) во время резонанса напряжений

$$x_L = x_C;$$

$$I \cdot x_L = I \cdot x_C;$$

$$U_L = U_C;$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = U_R;$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2} = R.$$

Таким образом, при резонансе напряжений полное сопротивление цепи минимально в сравнении с нерезонансными режимами; следовательно, ток максимален (по закону Ома) и возможен перегрев элементов. В то же время напряжение на реактивных элементах может в несколько раз превышать напряжение питания, если реактивные сопротивления больше активных.

Явление резонанса напряжения используется в радиотехнике, но, в то же время, оно опасно, так как возможен пробой изоляции проводов.

По условию резонанса напряжений,  $x_L = x_C$ . Тогда

$$\omega_p L = \frac{1}{\omega_p C};$$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

где  $\omega_p$  – частота питающей сети, при которой в цепи может наступить резонанс.

Получение резонанса напряжений возможно изменением индуктивности, емкости и частоты.

## Параллельное соединение активного, индуктивного и емкостного сопротивлений в цепи синусоидального тока. Резонанс токов

Рассмотрим электрическую цепь синусоидального тока, содержащую две параллельно включенные ветви: одна содержит активно-индуктивное, другая – активно-емкостное сопротивление (рис. 32).

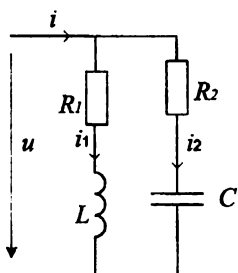


Рис. 32

К цепи подключен источник синусоидального напряжения, изменяющегося по закону  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ .

По первому закону Кирхгофа для мгновенных значений токов  $i = i_1 + i_2$ , а для комплексов –  $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ . Разделим обе части последнего уравнения на одно и то же напряжение  $\dot{U}$ :

$$\frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}} + \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}}; \quad \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}; \quad \underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2,$$

где  $\underline{Y}$  – полная проводимость;  $\underline{Y} = G - jB$ ,

$G$  – активная проводимость;

$B = B_L - B_C$  – реактивная проводимость.



Полная, активная и реактивная проводимости измеряются в Сименсах:  $[Y] = [G] = [B] = \text{См}$ .

Если известны параметры цепи, то проводимости вычисляются как

$$G_1 = \frac{R_1}{Z_1^2}; \quad G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2}; \quad B_L = \frac{x_L}{Z_1^2}; \quad B_C = \frac{x_C}{Z_2^2}.$$

Построим векторную диаграмму токов.

Пусть вектор приложенного напряжения совпадает с положительным направлением оси действительных чисел, т.е.  $\varphi_u = 0$  (рис.

33). Ток  $I_1$  отстает от приложенного напряжения  $\dot{U}$  на угол  $\varphi_1$ , ток  $I_2$  опережает это напряжение  $\dot{U}$  на угол  $\varphi_2$ .

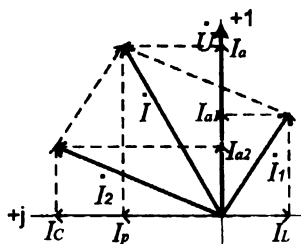


Рис. 33

Угол сдвига фаз между током на неразветвленном участке цепи и напряжением на концах этого участка определяется следующим образом:

$$\varphi = \arctg \frac{B_L - B_C}{G_1 + G_2}.$$

Проекции вектора тока в неразветвленной части цепи на оси действительных и мнимых чисел вычисляются как  $I_a = I_{a1} + I_{a2}$ ;  $I_p = I_L - I_C$ . Действующее значение этого тока  $I = \sqrt{I_a^2 + (I_L - I_C)^2}$ .

Если  $B_L > B_C$ , то угол сдвига фаз между напряжением и током  $\varphi > 0$ , вектор тока отстает от вектора напряжения, цепь носит активно-индуктивный характер.

Если  $B_L < B_C$ , то угол сдвига фаз между напряжением и током  $\varphi < 0$ , вектор тока опережает вектор напряжения, цепь носит активно-емкостный характер.

Если  $B_L = B_C$ , то угол сдвига фаз между напряжением и током  $\varphi = 0$ , цепь носит активный характер, в цепи наблюдается резонанс токов (рис. 34). При этом  $I_L = I_C$ ,  $I_p = 0$ ,  $I = I_a$ ,  $I_a = I_{a1} + I_{a2}$ .

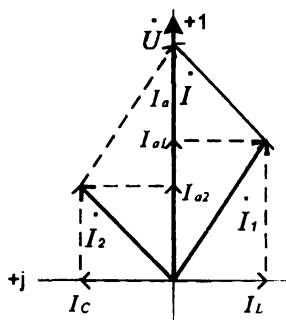


Рис. 34

**Выводы:**

1.  $\varphi = 0$ ;  $\underline{Y} = G$  – полная проводимость минимальна.
2. Ток в неразветвленной части цепи минимален ( $\dot{I} = \dot{U}\underline{Y}$ ).
3. Если реактивные проводимости много меньше активных ( $B_L \gg G_1$ ;  $B_C \gg G_2$ ), то соотношения между составляющими токов

$$I_L \gg I_{a1}; \quad I_C \gg I_{a2}; \quad I_1 = \sqrt{I_{a1}^2 + I_L^2}; \quad I_2 = \sqrt{I_{a2}^2 + I_C^2}; \quad I = I_{a1} + I_{a2}.$$

Следовательно,  $I_1 \gg I$ ;  $I_2 \gg I$ , токи в параллельных ветвях значительно больше, чем ток в неразветвленной части цепи.

### Мощность цепи синусоидального тока

Под мгновенной мощностью (мощностью в данный момент времени) понимается произведение мгновенных значений тока и напряжения:

$$p = ui = p_R + p_L + p_C.$$

Если напряжение и ток имеют одинаковые знаки, т. е.  $u > 0$ ;  $i > 0$  или  $u < 0$ ;  $i < 0$ , то мгновенная мощность положительна ( $p > 0$ ) и в рассматриваемый участок цепи поступает энергия.

Если напряжение и ток имеют разные знаки, т. е.  $u > 0$ ;  $i < 0$  или  $u < 0$ ;  $i > 0$ , то мгновенная мощность отрицательна ( $p < 0$ ) и участок отдает энергию.

Однако среднее значение мощности за период всегда положительное, так как на участке цепи всегда есть необратимые преобразования энергии.

Средняя за период мощность называется *активной* и определяется следующим образом:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = UI \cos \varphi.$$

Активная мощность измеряется в ваттах:  $[P] = \text{Вт}$ .

Мощность реактивных элементов  $p_p = p_L + p_C$  в среднем за период равна нулю, но в течение четверти периода она положительна, что физически означает накопление энергии в магнитном поле катушки или в электрическом поле конденсатора, а в течение следующей четверти – отрицательна, что соответствует расходу энергии.

Таким образом, в электрических цепях имеет место процесс колебания энергии, но необратимых преобразований энергии нет.

Мощность колебаний энергии называют реактивной:

$$Q = UI \sin \varphi.$$

Реактивная мощность измеряется в вольт-амперах реактивных:  $[Q] = \text{вар}$ .

Кроме активной и реактивной мощностей цепь синусоидального тока характеризуется и полной мощностью  $S$ . Это максимально возможная мощность при заданных напряжении  $U$  и токе  $I$ :

$$S = UI.$$

Полная мощность измеряется в вольт-амперах:  $[S] = \text{ВА}$ .

Связь между различными мощностями:  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ ,

$$\varphi = \arctg \frac{Q}{P}.$$

В комплексной форме полная мощность определяется как

$$\underline{S} = \underline{U} \dot{I}, \quad \text{где } \dot{I} - \text{сопряженный ток; } \dot{I} = I e^{j\varphi_1} = I' + jI''; \\ \dot{I} = I e^{-j\varphi_1} = I' - jI''.$$

$$\underline{S} = U e^{j\varphi_0} I e^{-j\varphi_1} = UI e^{j(\varphi_0 - \varphi_1)} = UI e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ.$$

## Расчет однофазных цепей синусоидального тока символическим методом

*Суть метода:* если в цепи переменного тока токи, напряжения, сопротивления записаны в комплексной форме, то для этих цепей справедливы законы и методы расчета цепей постоянного тока.

*Порядок расчета:*

1. Записать в комплексной форме сопротивления всех ветвей.
2. Задать направление на комплексной плоскости известного тока или напряжения; представить в комплексной форме этот ток или напряжение.
3. Любым способом определить комплексы остальных токов и напряжений.
4. Правильность решения проверить, составив уравнения баланса активной и реактивной мощностей.
5. Смоделировать данную электрическую цепь средствами моделирующего пакета *Electronics Workbench*, определить показания приборов, сравнить полученные результаты с расчетными, сделать выводы.

### Пример расчета однофазной цепи синусоидального тока

Для электрической цепи известны: действующее значение приложенного напряжения  $U = 230 \text{ В}$ , частота питающей сети  $f = 50 \text{ Гц}$ , резисторы  $R_1 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 2 \text{ Ом}$ , индуктивности  $L_1 = 3,185 \text{ мГн}$ ,  $L_2 = 12,75 \text{ мГн}$ , емкость  $C = 254,8 \text{ мкФ}$  (рис.35).

Определить токи, напряжения, мощности на всех участках и во всей цепи.

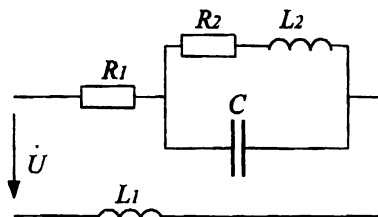


Рис. 35

*Порядок расчета :*

1. Определим индуктивные и емкостное сопротивления цепи:

$$X_1 = 2\pi f L_1 = 2\pi \cdot 50 \cdot 3,185 \cdot 10^{-3} = 1 \text{ Ом};$$

$$X_2 = 2\pi f L_2 = 2\pi \cdot 50 \cdot 12,75 \cdot 10^{-3} = 4 \text{ Ом};$$

$$X_3 = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 254,8 \cdot 10^{-6}} = 12,5 \text{ Ом}.$$

2. Запишем комплексы сопротивлений участков цепи:

$$\underline{Z}_1 = R_1 = 3 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 = 2 + j4 = 4,47e^{j63,4^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = -jX_3 = -j12,5 = 12,5e^{-j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_4 = jX_4 = j1 \text{ Ом}.$$

3. Вычислим эквивалентное сопротивление двух параллельных ветвей:

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{4,47e^{j63,4^\circ} \cdot 12,5e^{-j90^\circ}}{2 + j4 - 12,5} = 6,4e^{j50,2^\circ} = 4,1 + j4,92 \text{ Ом};$$

4. Определим эквивалентное сопротивление всей цепи:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_4 = 3 + j1 + 4,10 + j4,92 = 7,10 + j5,92 = 9,24e^{j39,8^\circ} \text{ Ом.}$$

5. Ток в неразветвленной части цепи определим по закону Ома. Для этого зададим направление приложенного напряжения и представим это напряжение в комплексной форме.

Пусть вектор приложенного напряжения совпадает с положительным направлением оси действительных чисел (рис. 36). Тогда

$$\dot{U} = Ue^{j0^\circ} = U = 230 \text{ В};$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{230}{9,24e^{j39,8^\circ}} = 24,89e^{-j39,8^\circ} = 19,12 - j15,93 \text{ А.}$$

6. Вычислим падение напряжения на резисторе  $R_1$ :

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 = 24,89e^{-j39,8^\circ} \cdot 3 = 74,67e^{-j39,8^\circ} = 57,36 - j47,79 \text{ В};$$

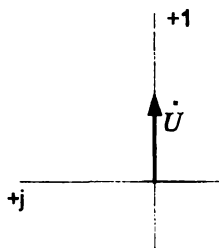


Рис. 36

7. Вычислим падение напряжения на индуктивности  $L_1$ :

$$\dot{U}_4 = \dot{I}_1 \underline{Z}_4 = 24,89e^{-j39,8^\circ} \cdot e^{j90^\circ} = 24,89e^{j50,2^\circ} = 15,93 + j19,12 \text{ В.}$$

8. Напряжение на параллельном участке определим по второму закону Кирхгофа. Поскольку  $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_{23} + \dot{U}_4$ , то

$$\begin{aligned} \dot{U}_{23} &= \dot{U} - \dot{U}_1 - \dot{U}_4 = 230 + (57,36 - j47,79) - (15,93 + j19,12) = \\ &= 156,71 + j28,67 = 159,31e^{j10,4^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

9. Токи в параллельных ветвях, согласно закону Ома, рассчитаем как

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{23}}{\underline{Z}_2} = \frac{159,31e^{j10,4^\circ}}{4,47e^{j63,4^\circ}} = 35,54e^{-j53^\circ} = 21,45 - j28,46 \text{ A};$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{23}}{\underline{Z}_3} = \frac{159,31e^{j10,4^\circ}}{12,5e^{-j90^\circ}} = 12,7e^{j100,4^\circ} = -2,30 + j12,53 \text{ A};$$

Векторная диаграмма токов и напряжений приведена на рис. 37.

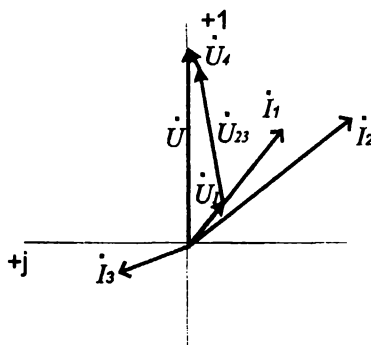


Рис.37

10. Рассчитаем:

1) мощность, вырабатываемую источником питания:

$$\underline{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}_1^* = 230 \cdot (19,12 + j5,93) = 4397,6 + j3663,9 \text{ VA};$$

$$P = 4397,6 \text{ Вт}; Q = 3663,9 \text{ Вар}.$$

2) мощности, потребляемые нагрузкой:

• мощность сопротивления  $R_1$ :

$$\underline{S}_1 = \dot{U}_1 \cdot \dot{I}_1^* = 74,67e^{-j39,8^\circ} \cdot 24,89e^{j39,8^\circ} = 1858,5e^{j0^\circ} = 1858,8 \text{ VA};$$

$$P_1 = 1858,5 \text{ Вт}; Q_1 = 0$$



(нагрузка этого участка цепи носит активный характер);

- мощность участка цепи, содержащего активное сопротивление  $R_2$  и индуктивность  $L_2$ :

$$\begin{aligned}\underline{S}_2 &= \dot{U}_{23} \cdot I_2 = 159,31e^{j10,4^\circ} \cdot 35,64e^{j53^\circ} = 5677,8e^{j63,4^\circ} = \\ &= 2542,3 + j5076,8 \text{ BA}; \\ P_2 &= 2542,3 \text{ Bm}; \quad Q_2 = 5076,8 \text{ Var};\end{aligned}$$

- мощность участка цепи, содержащего емкость  $C$ :

$$\begin{aligned}\underline{S}_3 &= \dot{U}_{23} \cdot I_3 = 153,31e^{j10,4^\circ} \cdot 12,74e^{-j100,4^\circ} = -j2029,6 \text{ BA}; \\ P_3 &= 0; \quad Q_3 = -2029,6 \text{ Var}\end{aligned}$$

(нагрузка участка цепи – емкостная);

- мощность участка цепи, содержащего индуктивность  $L_1$ :

$$\begin{aligned}\underline{S}_4 &= \dot{U}_4 \cdot I_1 = 24,89e^{j50,2^\circ} \cdot 24,89e^{j39,8^\circ} = 619e^{j90^\circ} = j619,5 \text{ BA}; \\ P_4 &= 0; \quad Q_4 = 615,9 \text{ Var}\end{aligned}$$

(нагрузка участка цепи – индуктивная);

3) уравнение баланса мощностей:

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 + \underline{S}_4; \\ \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 + \underline{S}_4 &= 1858,5 + 2542,3 + j5076,8 - j2029,6 + j619,5 = \\ &= 4400,8 + j3666,7 \text{ BA}; \\ \underline{S} &= 4397,6 + j3663,9 \text{ BA}.\end{aligned}$$

Погрешность в расчетах не превышает 5%, следовательно, задача решена верно.

11. Получаем модель заданной электрической цепи (рис. 38).

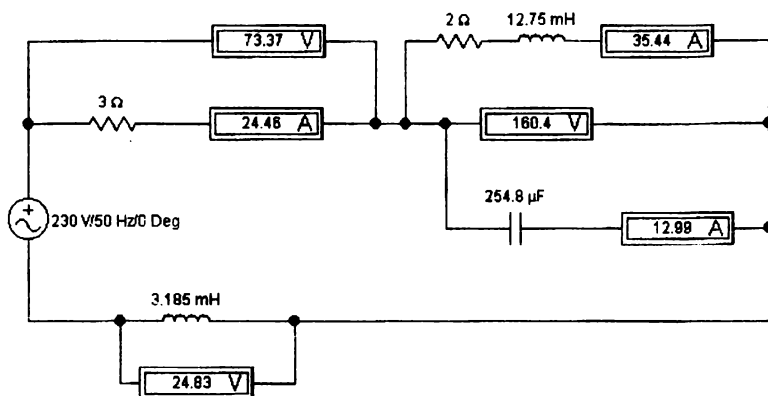


Рис. 38

Полученные при моделировании показания приборов немного отличаются от расчетных, так как измерительные приборы имеют внутренние сопротивления, которые моделирующая система учитывает.

### ***Вопросы для самопроверки***

1. Какими параметрами характеризуется синусоидально изменяющаяся величина? Дать определения этим величинам на примере синусоидального напряжения.

2. Что понимают под действующим значением тока (напряжения, ЭДС)? Как связано действующее значение тока с его амплитудным значением?

3. Изложить основы символического метода расчета электрической цепи синусоидального тока.
4. Дать определение векторной диаграмме токов и напряжений.
5. Пояснить физический смысл активной, реактивной, полной мощностей.
6. Регулированием каких параметров электрической цепи можно в ней достичь резонанса токов?
7. Какие параметры необходимо задать у источника синусоидального тока при его моделировании?
8. Указать тип приборов для измерения синусоидальных токов и напряжений.

## ЦЕПИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

### Основные характеристики несинусоидальных периодических токов и напряжений

Большинство периодических функций, с которыми имеют дело в электротехнике и электронике, удовлетворяют условиям Дирихле, поэтому их можно представить в виде ряда Фурье:

$$e = E_0 + E_{m1} \sin(\omega_1 t + \Psi_{e1}) + E_{m2} \sin(2\omega_1 t + \Psi_{e2}) + \dots$$

$$u = U_0 + U_{m1} \sin(\omega_1 t + \Psi_{u1}) + U_{m2} \sin(2\omega_1 t + \Psi_{u2}) + \dots$$

$$i = I_0 + I_{m1} \sin(\omega_1 t + \Psi_{i1}) + I_{m2} \sin(2\omega_1 t + \Psi_{i2}) + \dots$$

где  $E_0$ ,  $U_0$ ,  $I_0$  – постоянные составляющие несинусоидальных ЭДС, напряжения, тока;

$E_{m1}$ ,  $U_{m1}$ ,  $I_{m1}$  – амплитуды гармоник ЭДС, напряжения, тока основной частоты;

$E_{m2}$ ,  $U_{m2}$ ,  $I_{m2}$  – амплитуды гармоник ЭДС, напряжения, тока двойной и других кратных частот;

$\omega_1$  – циклическая частота гармоник основной частоты;

$\Psi_{u1}$ ,  $\Psi_{u2}$ ,  $\Psi_{e1}$ ,  $\Psi_{e2}$ ,  $\Psi_{i1}$ ,  $\Psi_{i2}$  – начальные фазы гармоник основной и кратных частот напряжения, ЭДС, тока.

Действующее значение любой периодической функции – сред-

неквадратичное значение  $I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$ , т.е.

$$I = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + \dots + I_{km}^2}{2}} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2};$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + \dots + U_{km}^2}{2}} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2};$$

$$E = \sqrt{E_0^2 + \frac{E_{1m}^2 + E_{2m}^2 + \dots + E_{km}^2}{2}} = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + \dots + E_k^2}.$$

Таким образом, действующее значение периодического несинусоидального тока (напряжения, ЭДС) равно квадратному корню из суммы квадратов постоянной составляющей  $I_0(U_0, E_0)$  и квадратов действующих значений всех гармонических составляющих  $I_k(U_k, E_k)$ .

Действующее значение несинусоидальных периодических величин не зависит от начальных фаз гармоник, а зависит только от их действующих значений (амплитуд).

Средние значения периодических несинусоидальных величин ( $i, u, e$ ) за период определяются следующим образом:

$$I_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt; U_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt; E_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T e dt.$$

Они равны постоянной составляющей, так как суммарная площадь, ограниченная кривой за период любой гармонической составляющей, равна нулю.

$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \Psi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \Psi_2) + I_{3m} \sin(3\omega t + \Psi_3).$$

Сравнивать несинусоидальные периодические величины можно при помощи трех коэффициентов: формы  $k_\phi$ , амплитуды  $k_a$ , искажения  $k_u$ :

$$k_\phi = \frac{I}{I_{cp}}; k_a = \frac{I_m}{I}; k_u = \frac{I_1}{I},$$

где  $I_m, I_{cp}, I$  – амплитудное, среднее и действующее значения величины;

$I_1$  – действующее значение основной гармоники.

### Мощность цепи несинусоидального тока

В линейных электрических цепях периодического несинусоидального тока рассматривают мощности четырех видов: активную, реактивную, полную и мощность искажений. Активная мощность – среднее значение мгновенной мощности ( $p = ui$ ) за период:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k;$$

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

Таким образом, активная мощность при несинусоидальном токе равна сумме активных мощностей отдельных гармоник и постоянной составляющей.

Реактивная мощность цепи несинусоидального тока равна сумме реактивных мощностей всех гармоник.

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots$$

Полная мощность цепи несинусоидального тока равна произведению действующих значений несинусоидальных напряжения и тока:  $S = UI$ .

В цепях периодического несинусоидального тока  $S^2 \neq P^2 + Q^2$ . Поэтому вводится еще одна мощность – мощность искажений, которая определяется следующим образом:

$$T^2 = S^2 - (P^2 + Q^2).$$

## Расчет электрической цепи с несинусоидальными ЭДС и токами

Расчет проводят методом наложения, при котором считается, что линейная электрическая цепь для каждой гармонической составляющей ЭДС независима.

*Порядок расчета:*

1. Разложить действующую в цепи ЭДС на гармонические составляющие.
2. Рассчитать токи и напряжения в цепи для каждой из гармонических составляющих ЭДС.
3. Суммировать решения, полученные для каждой составляющей.

Пусть к электрической цепи приложена ЭДС, изменяющаяся по закону

$$e = E_0 + E_{(1)m} \sin(\omega t + \Psi_{(1)}) + E_{(2)m} \sin(2\omega t + \Psi_{(2)}) = E_0 + e_{(1)} + e_{(2)}.$$

Тогда ток в цепи тоже будет изменяться по несинусоидальному закону и может быть представлен как сумма постоянной составляющей и гармоник кратных частот:  $i = I_0 + i_{(1)} + i_{(2)}$ .

При расчете электрической цепи следует учитывать, что емкостное сопротивление с увеличением порядка гармоники уменьшается в  $k$  раз, а индуктивное сопротивление – в  $k$  раз увеличивается.

$$x_{C(k)} = \frac{1}{k\omega C} = \frac{x_{C(1)}}{k}; \quad x_{L(k)} = k\omega L = kx_{L(1)}.$$

Активное сопротивление с ростом частоты за счет поверхностного эффекта возрастает, но при невысоких частотах можно считать его практически неизменным, равным сопротивлению постоянному току.

## Пример расчета однофазной цепи периодического несинусоидального тока

На рис. 39 изображена схема цепи, параметры которой при основной частоте имеют  $\omega_1 L = 12 \text{ Ом}$  и  $\frac{1}{\omega_1 C} = 30 \text{ Ом}$ , активные сопротивления  $R_1 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 20 \text{ Ом}$ . Приложенное к цепи напряжение изменяется по закону

$$u = U_{(0)} + U_{m(1)} \cdot \sin \omega_1 t + U_{m(3)} \cdot \sin(3\omega_1 t + \psi_{(3)}),$$

где  $U_{(0)} = 30 \text{ В}$ ,  $U_{m(1)} = 100 \text{ В}$ ,  $U_{m(3)} = 40 \text{ В}$ ,  $\psi_{(3)} = 20^\circ$ .

Требуется записать уравнение мгновенного значения тока в неразветвленном участке цепи. Определить действующее значение каждого тока.

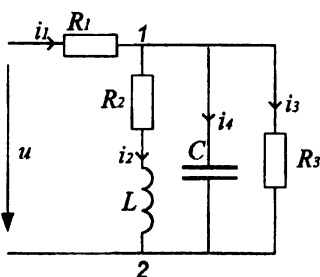


Рис. 39

*Порядок расчета:*

1. Рассчитать постоянную составляющую. Так как при протекании постоянного тока индуктивность ведет себя как идеальный провод, а емкость – как разрыв, то эквивалентное сопротивление цепи и



величины постоянного тока в неразветвленной части цепи и в ветвях с сопротивлениями  $R_2$  и  $R_3$  вычисляются как

$$R_{(0)} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 6 + \frac{5 \cdot 20}{5 + 20} = 10 \text{ Ом};$$

$$I_{1(0)} = \frac{U_{(0)}}{R_{(0)}} = \frac{30}{10} = 3 \text{ А};$$

$$I_{2(0)} = I_{1(0)} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 3 \cdot \frac{20}{5 + 20} = 2,4 \text{ А};$$

$$I_{3(0)} = I_{1(0)} - I_{2(0)} = 3 - 2,4 = 0,6 \text{ А}; \quad I_{4(0)} = 0.$$

2. Сделать расчет для первой гармоники. Определить комплексные сопротивления трех параллельных ветвей:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{12(1)}} &= \frac{1}{Z_{2(1)}} + \frac{1}{Z_{3(1)}} + \frac{1}{Z_{4(1)}} = \frac{1}{5 + j12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{-j30} = \\ &= (79,6 - j37,7) \cdot 10^{-3} \text{ См}; \end{aligned}$$

$$\text{отсюда } Z_{12(1)} = \frac{1}{(79,6 - j37,7) \cdot 10^{-3}} = 11,4 e^{j25,33^\circ} = 10,25 + j4,83 \text{ Ом}.$$

Комплексное сопротивление всей цепи

$$Z_{(1)} = R_1 + Z_{12(1)} = 6 + 10,25 + j4,83 = 16,25 + j4,83 = 17 e^{j16,5^\circ} \text{ Ом}.$$

Комплексные максимальные токи в неразветвленной части цепи, напряжения на параллельных ветвях и токи в них вычисляются как

$$I_{1m(1)} = \frac{U_{m(1)}}{Z_{(1)}} = \frac{100}{17 e^{j16,5^\circ}} = 5,88 e^{-j16,5^\circ} \text{ Ом};$$

$$U_{12m(1)} = I_{1m(1)} \cdot Z_{12(1)} = 5,88 e^{-j16,5^\circ} \cdot 11,4 e^{j25,33^\circ} = 67 e^{j8,83^\circ} \text{ В};$$

$$I_{2m(1)} = \frac{U_{12m(1)}}{Z_{2(1)}} = \frac{67 e^{j8,83^\circ}}{5 + j12} = \frac{67 e^{j8,83^\circ}}{13 e^{j67,38^\circ}} = 5,15 e^{j58,55^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_{3m(1)} = \frac{\dot{U}_{12m(1)}}{\underline{Z}_{3(1)}} = \frac{67e^{j8,83^\circ}}{20} = 5e^{j8,83^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_{4m(1)} = \frac{\dot{U}_{12m(1)}}{\underline{Z}_{4(1)}} = \frac{67e^{j8,83^\circ}}{-j30} = \frac{67e^{j8,83^\circ}}{30e^{-j90^\circ}} = 2,23e^{j98,83^\circ} \text{ A}.$$

3. Произвести расчет для третьей гармоники аналогично расчету для первой (основной) гармоники:

$$\underline{Z}_{1(3)} = 6 \text{ Ом}; \underline{Z}_{2(3)} = j3\omega L = 3 + j36 = 36,5e^{j82,09^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{3(3)} = 20 \text{ Ом}; \underline{Z}_{4(3)} = -j\frac{1}{3\omega C} = -j\frac{30}{3} = -j10 \text{ Ом};$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{Z}_{12(3)}} &= \frac{1}{\underline{Z}_{2(3)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{3(3)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{4(3)}} = \\ &= \frac{1}{5 + j36} + \frac{1}{20} + \frac{1}{-j10} = (53,77 + j72,8) \cdot 10^{-3} \text{ См}; \end{aligned}$$

$$\underline{Z}_{12(3)} = \frac{1}{(53,77 + j72,8) \cdot 10^{-3}} = 11,05e^{-j53,58^\circ} = 6,56 - j8,9 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{(3)} = R_1 + \underline{Z}_{12(3)} = 6 + 6,56 - j8,9 = 12,56 - j8,9 = 15,35e^{-j35,08^\circ} \text{ Ом};$$

$$\dot{I}_{1m(3)} = \frac{\dot{U}_{m(3)}}{\underline{Z}_{(3)}} = \frac{40e^{j20^\circ}}{15,35e^{-j35,08^\circ}} = 2,6e^{j55,08^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{U}_{12m(3)} = \dot{I}_{1m(3)} \cdot \underline{Z}_{12(3)} = 2,6e^{j55,08^\circ} \cdot 11,05e^{-j53,58^\circ} = 28,7e^{j1,5^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{I}_{2m(3)} = \frac{\dot{U}_{12m(3)}}{\underline{Z}_{2(3)}} = \frac{28,7e^{j1,5^\circ}}{5 + j36} = \frac{28,7e^{j1,5^\circ}}{36,5e^{j82,08^\circ}} = 0,79e^{-j80,58^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_{3m(3)} = \frac{\dot{U}_{12m(3)}}{\underline{Z}_{3(3)}} = \frac{28,7e^{j1,5^\circ}}{20} = 1,44e^{j1,5^\circ} \text{ A};$$

$$I_{4m(3)} = \frac{U_{12m(3)}}{Z_{4(3)}} = \frac{28,7e^{j1,5^\circ}}{-j10} = \frac{28,7e^{j1,5^\circ}}{10e^{-j90^\circ}} = 2,87e^{j91,5^\circ} \text{ A.}$$

4. Составить уравнение тока в неразветвленной части цепи:

$$i_1 = 3 + 5,88 \cdot \sin(\omega t - 16,5^\circ) + 2,6 \cdot \sin(3\omega t + 55,08^\circ) \text{ A.}$$

5. Определить действующее значение каждого тока:

$$I_1 = \sqrt{I_{1(0)}^2 + \frac{I_{1m(1)}^2 + I_{1m(3)}^2}{2}} = \sqrt{3^2 + \frac{5,88^2 + 2,6^2}{2}} = 5,45 \text{ A;}$$

$$I_2 = \sqrt{I_{2(0)}^2 + \frac{I_{2m(1)}^2 + I_{2m(3)}^2}{2}} = \sqrt{2,4^2 + \frac{5,15^2 + 0,79^2}{2}} = 4,4 \text{ A;}$$

$$I_3 = \sqrt{I_{3(0)}^2 + \frac{I_{3m(1)}^2 + I_{3m(3)}^2}{2}} = \sqrt{0,6^2 + \frac{3,35^2 + 1,44^2}{2}} = 2,64 \text{ A;}$$

$$I_4 = \sqrt{I_{4(0)}^2 + \frac{I_{4m(1)}^2 + I_{4m(3)}^2}{2}} = \sqrt{0 + \frac{2,23^2 + 2,87^2}{2}} = 2,57 \text{ A.}$$

6. Средствами моделирующего пакета Electronics Workbench собрать схему (рис. 40), снять осциллограмму тока в неразветвленной части цепи (рис. 41).

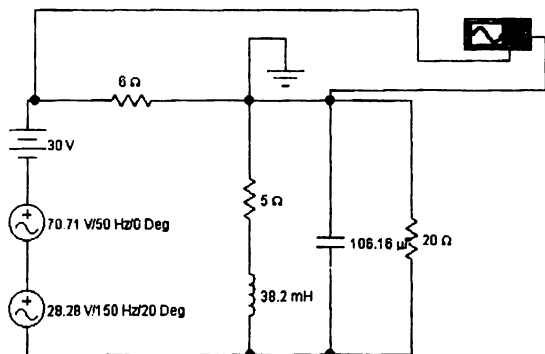


Рис. 40

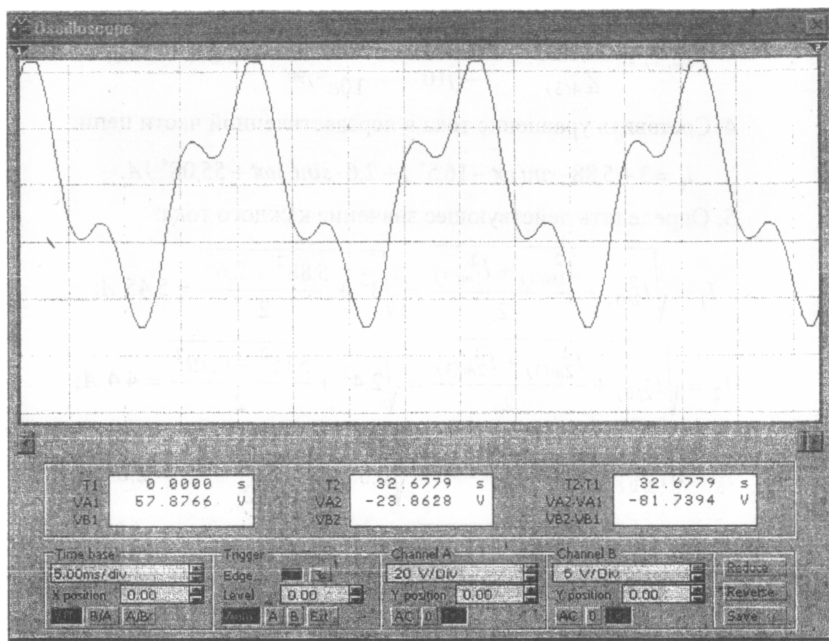


Рис. 41

### ***Вопросы для самопроверки***

1. Изложить основные положения методики расчета линейных цепей при периодических несинусоидальных токах.
2. Охарактеризовать физический смысл действующего значения несинусоидального тока.
3. Сколько источников напряжения и какие необходимо использовать для моделирования электрической цепи, к которой приложено напряжение, изменяющееся по закону

$$u(t) = 100 + 141 \sin(314t + 45^\circ) + 70,7 \sin(628t - 45^\circ) + 28,2 \sin 942t \text{ (В)}$$

## ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

### Понятие о переходных процессах

Переходный процесс – процесс перехода от одного устойчивого режима работы электрической цепи к другому, чем-либо отличающемуся от предыдущего. Данный процесс возникает вследствие включения или отключения пассивных или активных ветвей, коротких замыканий отдельных участков, различного рода переключений, внезапных изменений того или иного параметра и т.д. Эти воздействия называются коммутациями.

Переходные процессы заканчиваются спустя некоторое время после коммутации.

Начало отсчета времени переходного процесса  $t=0$  начинается с момента коммутации (рис. 42). Момент времени непосредственно перед коммутацией  $-t=0-$ , сразу после коммутации  $-t=0+$ .

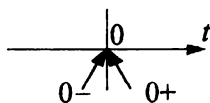


Рис. 42

Цель расчета переходного процесса – в определении законов изменения токов и напряжений во время коммутации.

## Законы коммутации

Расчет переходного процесса производится на основании двух законов коммутации:

*Первый закон:* ток через индуктивность непосредственно до коммутации равен току через ту же индуктивность непосредственно после коммутации, или ток на индуктивности не может изменяться скачком:  $i_L(0-) = i_L(0+)$ .

Рассмотрим электрическую схему, приведенную на рис. 43.

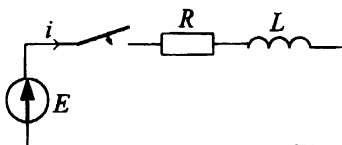


Рис. 43

По второму закону Кирхгофа,  $E = u_R + u_L$ .

$$u_R = R \cdot i; u_L = L \frac{di}{dt};$$

$$E = R \cdot i + L \frac{di}{dt}.$$

Пусть ток во время переходного процесса изменится скачком, т.е. за время  $\Delta t \rightarrow 0$  ток изменится на конечную величину  $\Delta i$  ( $i(0+) - i(0-) = \Delta i$ ). Величина  $\frac{\Delta i}{\Delta t}$  – бесконечно большая, а так как

$$\frac{di}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta t}, \text{ то } L \frac{di}{dt} = \infty.$$

По второму закону Кирхгофа,  $E = R \cdot i + \infty$ , а  $E$  – конечная величина; следовательно, второй закон Кирхгофа не соблюдается, и пред-

положение о том, что ток, протекающий через индуктивность, может измениться скачком, неверно. Первый закон коммутации (ток, протекающий через индуктивность, скачком измениться не может) доказан.

*Второй закон:* напряжение на емкости непосредственно до коммутации равно напряжению на той же емкости непосредственно после коммутации, или напряжение на емкости не может измениться скачком:  $U_C(0-) = U_C(0+)$ .

Рассмотрим электрическую цепь (рис. 44).

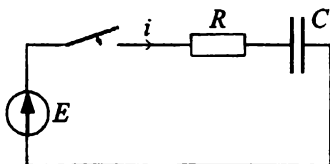


Рис. 44

По второму закону Кирхгофа,  $E = u_R + u_C$ .

$$i = C \frac{du_C}{dt}; \quad E = RC \frac{du_C}{dt} + u_C.$$

Пусть во время переходного процесса падение напряжения на конденсаторе изменится скачком, т.е. за время  $\Delta t \rightarrow 0$  оно изменится на конечную величину  $\Delta u_C$  ( $u_C(0+) - u_C(0-) = \Delta u_C$ ). Тогда  $\frac{\Delta u_C}{\Delta t}$  — ве-

личина бесконечно большая:  $\frac{du_C}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u_C}{\Delta t} = \infty$ .

По второму закону Кирхгофа,  $E = R \cdot C \cdot \infty + u_C$ . Так как  $E$  — конечная величина, то второй закон Кирхгофа не соблюдается. Предположение неверно. Второй закон коммутации доказан.

## Независимые и зависимые начальные условия

Для любой схемы электрической цепи после коммутации в ней можно записать уравнения по законам Кирхгофа, из них определить значения токов во всех ветвях и напряжения на любых участках цепи в первый момент после коммутации ( $t=0+$ ). Эти значения токов и напряжений являются начальными условиями.

Начальные условия делятся на независимые и зависимые. Значения тока, протекающего через индуктивность  $i_L(0+)$ , и напряжения на емкости  $u_C(0+)$  – независимые начальные условия. Они определяются в соответствии с законами коммутации:  $i_L(0-) = i_L(0) = i_L(0+)$  и  $u_C(0-) = u_C(0) = u_C(0+)$ . Значения остальных токов и напряжений в первый момент после коммутации – зависимые начальные условия. Они определяются из законов Кирхгофа и известных независимых начальных условий.

## Характеристическое уравнение электрической цепи

Характеристическое уравнение электрической цепи составляется для послекоммутационного режима и определяется конфигурацией схемы.

По схеме электрической цепи можно сразу определить степень характеристического уравнения – она равна числу независимых начальных условий (токов, протекающих через индуктивность, и напряжений на емкости) в послекоммутационной схеме и не зависит от вида источников ЭДС в цепи.



Мы будем рассматривать переходные процессы, возникающие в цепях постоянного тока, содержащих либо одну индуктивность, либо одну емкость.

Способов составления характеристического уравнения несколько; наиболее распространенный из них основан на записи входного сопротивления цепи переменному току:

1. Записывается входное сопротивление переменному току электрической цепи после коммутации  $\underline{Z}(j\omega)$ .

2. Заменяется в нем  $j\omega$  на  $p$  и полученное выражение приравнивается к нулю. Получается характеристическое уравнение  $\underline{Z}(p) = 0$ .

3. Находятся корни этого характеристического уравнения  $p$ .  $[p] = c^{-1}$ .

В качестве примера составим характеристическое уравнение и найдем его корни для электрической цепи (см. рис. 44):

$$\underline{Z}(j\omega) = R - j \frac{1}{\omega C} = R + \frac{1}{j\omega C};$$

$$\underline{Z}(p) = R + \frac{1}{pC} = 0; pCR + 1 = 0; p = -\frac{1}{RC}.$$

### Классический метод расчета переходных процессов

Классическим называют метод расчета переходных процессов, в котором решение дифференциального уравнения представляет собой сумму принужденной и свободной составляющих.

*Порядок решения задач классическим методом:*

1. Для цепи после коммутации составить систему дифференциальных уравнений по первому и второму законам Кирхгофа.
2. Определить независимые начальные условия ( $u_C$  и  $i_L$ ) из расчета режима цепи до коммутации с применением законов коммутации.
3. Записать искомые величины в виде суммы принужденных и свободных составляющих.
4. Найти принужденные составляющие, рассчитав установившийся режим цепи после коммутации.
5. Составить характеристическое уравнение и вычислить его корни.
6. В зависимости от вида корней характеристического уравнения записать свободные составляющие и искомые решения в общем виде.
7. Для определения постоянных интегрирования записать искомые величины, их производные и систему дифференциальных уравнений для момента  $t=0$ .
8. Подставить вычисленные постоянные интегрирования в искомые решения.
9. Построить графики изменения токов и напряжений во время переходного процесса.

### **Переходные процессы в RL-цепях постоянного тока**

Пусть катушка индуктивности включается на постоянное напряжение (рис. 45). Определить законы изменения тока и падений на-

пряжений на индуктивности и резисторе во время переходного процесса.

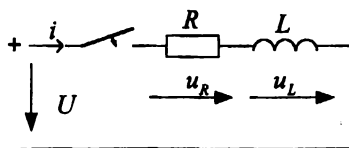


Рис. 45

По второму закону Кирхгофа для послекоммутационной схемы

$$U = u_R + u_L. \quad u_R = R \cdot i; \quad u_L = L \frac{di}{dt}; \quad U = R \cdot i + L \frac{di}{dt}.$$

Ток переходного процесса будем искать в виде суммы принужденной и свободной составляющих. Для нахождения принужденной составляющей тока необходимо рассчитать установившийся режим после коммутации;  $i_{np} = \frac{U}{R}$ , так как в установившемся режиме при протекании постоянного тока индуктивность ведет себя как идеальный провод, падения напряжения на ней не происходит.

Составим характеристическое уравнение:  $Lp + R = 0$ ; его корень

$$p = -\frac{R}{L}.$$

Свободную составляющую тока будем искать в виде  $i_{св} = Ae^{pt}$ , где  $A$  – постоянный коэффициент, определяющийся из начальных условий. Тогда

$$i = \frac{U}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

По первому закону коммутации,  $i(0+) = i(0-) = 0$ , так как до коммутации цепь была отключена от источника ЭДС. Отсюда

$$i(0+) = \frac{U}{R} + A = 0; A = -\frac{U}{R}. \text{ Тогда ток через индуктивность во время}$$

переходного процесса будет изменяться по закону  $i = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$

(рис. 46).

Обозначим  $-\frac{1}{p} = \tau$  – постоянную времени, которая определяет скорость изменения тока или напряжения во время переходного процесса. Для данной электрической цепи  $\tau = \frac{L}{R}$ . Единица измерения постоянной времени

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{\text{Гн}}{\text{Ом}} = \frac{\text{Ом} \cdot \text{с}}{\text{Ом}} = \text{с}.$$

Доказано, что за время  $(4 \dots 5)\tau$  переходный процесс полностью затухает, в цепи возникает установившийся режим.

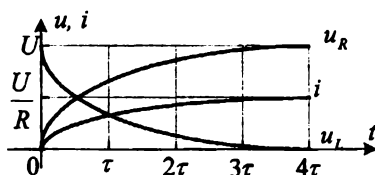


Рис. 46

Падение напряжения на резисторе  $u_R = i \cdot R = U - Ue^{-\frac{R}{L}t}$   
(см. рис. 46).

Падение напряжения на индуктивности (см. рис. 46)

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \left( -\frac{R}{L} \right) \left( -\frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \right) = U e^{-\frac{R}{L}t}.$$

*Примечание.* При построении графиков функций вида  $y = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$  необходимо помнить о следующих соотношениях:

t	0	$\tau$	$2\tau$	$3\tau$	$4\tau$	$5\tau$
$e^{-\frac{t}{\tau}}$	1	0,367	0,135	0,050	0,018	0,007

### Заряд и разряд конденсатора

Рассмотрим электрическую цепь, в которой ключ может замыкаться в два положения (рис. 47).

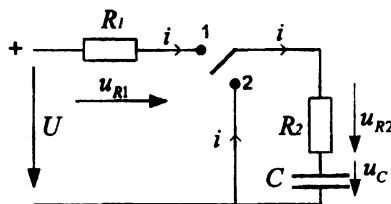


Рис. 47

1. Ключ замыкается в положение 1. До коммутации напряжения на конденсаторе не было, т.е.  $u_C(0-) = 0$ .

По второму закону Кирхгофа

$$u_{R1} + u_{R2} + u_C = U.$$

$$i = C \frac{du_C}{dt}; u_{R1} = iR_1; u_{R2} = iR_2;$$

$$(R_1 + R_2)C \frac{du_C}{dt} + u_C = U.$$

Напряжение на конденсаторе во время переходного процесса ищем как сумму принужденной и свободной составляющих:  $u_C = u_{Cnp} + u_{Cce}$ .

Принужденная составляющая  $u_{Cnp} = U$ .

Свободная составляющая  $u_{Cce} = Ae^{pt}$ , где  $A$  – постоянный коэффициент, определяемый из начальных условий;  $p$  – корень характеристического уравнения:  $R_1 + R_2 + \frac{1}{Cp} = 0$ ;  $(R_1 + R_2)Cp + 1 = 0$ ;

$$p = -\frac{1}{(R_1 + R_2)C}. \text{ Тогда } u_C = U + Ae^{-\frac{t}{(R_1 + R_2)C}}.$$

Для определения постоянного коэффициента воспользуемся вторым законом коммутации:  $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$ ;  $u_C(0+) = U + A = 0$ ;  $A = -U$ .

Тогда падение напряжения на конденсаторе во время переходного процесса изменяется по закону  $u_C = U - Ue^{-\frac{t}{(R_1 + R_2)C}}$  (рис. 48).

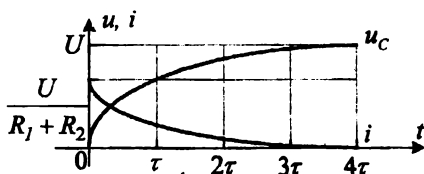


Рис. 48

Ток через конденсатор

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \left( -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} \right) (-U) e^{-\frac{t}{(R_1 + R_2)C}} = \frac{U}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{(R_1 + R_2)C}}.$$

2. Конденсатор заряжен до напряжения, равного приложенному ( $U_C = U$ ). Ключ замыкается в положение 2 (см. рис. 47).

По второму закону Кирхгофа, для послекоммутационной схемы  $u_{R2} + u_C = 0$ .

$$\text{Поскольку } i = C \frac{du_C}{dt}, \text{ то } R_2 C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

Напряжение на конденсаторе во время переходного процесса будем искать как сумму свободной и принужденной составляющих:

$$u_C = u_{Cсв} + u_{Cпр}.$$

Принужденная составляющая напряжения будет равна нулю ( $u_{Cпр} = 0$ ), так как переходный процесс будет протекать до тех пор, пока конденсатор полностью не разрядится.

Свободная составляющая напряжения на конденсаторе  $u_{Cсв} = Ae^{pt}$ .

Характеристическое уравнение для послекоммутационной схемы и его корень определяем следующим образом:

$$R_2 + \frac{1}{pC} = 0; R_2 Cp + 1 = 0; p = -\frac{1}{R_2 C}.$$

Тогда свободная составляющая напряжения на конденсаторе будет иметь вид  $u_C = Ae^{-\frac{t}{R_2 C}}$ , где  $A$  – постоянный коэффициент, определяемый из начальных условий.

Для определения начальных условий воспользуемся вторым законом коммутации:  $u_C(0+) = u_C(0-) = U$ . Отсюда  $u_C(0+) = A = U$ , и напряжение на конденсаторе во время переходного процесса (рис. 49) будет изменяться по закону

$$u_C = U e^{-\frac{t}{R_2 C}}.$$

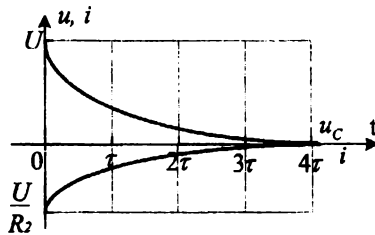


Рис. 49

Ток, протекающий через конденсатор во время переходного процесса (ток разрядки конденсатора), находим как

$$i = C \left( -\frac{1}{R_2 C} \right) U e^{-\frac{t}{R_2 C}} = -\frac{U}{R_2} e^{-\frac{t}{R_2 C}}.$$

Ток разрядки конденсатора – отрицательный, так как он направлен противоположно току зарядки конденсатора.

### Расчет переходных процессов в цепях, содержащих активное сопротивление и индуктивность

*Постановка задачи:*

Для цепи известны: напряжение  $U = 30\text{В}$ , сопротивления  $R = 10\text{Ом}$ ,  $R_1 = 5\text{Ом}$ ,  $R_2 = 30\text{Ом}$ , индуктивность  $L = 2\text{Гн}$  (рис. 50). Найти законы изменения во времени всех токов и напряжений (до коммутации в цепи был установившийся режим). Построить кривые измерения этих величин.



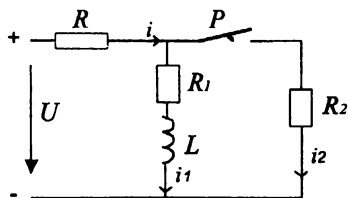


Рис. 50

*Решение.*

1. Произвести расчет цепи в установившемся режиме до коммутации (определить независимые начальные условия):

$$i_1(0-) = i(0-) = \frac{U}{R + R_1} = \frac{30}{10 + 5} = 2 \text{ A}$$

(до коммутации ключ  $P$  разомкнут, ток через сопротивление  $R_2$  не протекает).

2. Токи в ветвях определить как суммы свободных и принужденных составляющих:

$$i = i_{св} + i_{np}; \quad i_1 = i_{1св} + i_{1np}; \quad i_2 = i_{2св} + i_{2np}.$$

3. Для определения принужденных составляющих рассчитать электрическую цепь в установившемся режиме после коммутации:

$$i_{np} = \frac{U}{R + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{30}{10 + \frac{5 \cdot 30}{5 + 30}} = 2,1 \text{ A};$$

$$u_{12np} = U - i_{np} \cdot R = 30 - 2,1 \cdot 10 = 9 \text{ В};$$

$$i_{1np} = \frac{u_{12np}}{R_1} = \frac{9}{5} = 1,8 \text{ A};$$

$$i_{2np} = \frac{u_{12np}}{R_2} = \frac{9}{30} = 0,3 \text{ A}.$$

4. Свободные составляющие токов найти в виде

$$i_{св} = Ae^{pt}; i_{1св} = A_1e^{pt}; i_{2св} = A_2e^{pt},$$

где  $p$  – корень характеристического уравнения.

5. Составить характеристическое уравнение цепи:

$$Z(p) = R + \frac{(R_1 + pL) \cdot R_2}{R_1 + pL + R_2} = 10 + \frac{(5 + p \cdot 2) \cdot 30}{5 + p \cdot 2 + 30} = 10 + \frac{150 + 60p}{35 + 2p} = 0.$$

Определить корень характеристического уравнения:

$$10 + \frac{150 + 60p}{35 + 2p} = 0;$$

$$350 + 20p + 150 + 60p = 0;$$

$$500 + 80p = 0;$$

$$p = -6,25 \text{ с}^{-1}.$$

6. Для определения постоянного коэффициента  $A_1$  воспользоваться первым законом коммутации: ток через индуктивность в первый момент после коммутации равен току через эту же индуктивность в последний момент перед коммутацией (ток на индуктивности скачком измениться не может):

$$i_1(0-) = i_1(0) = i_1(0+).$$

$$i_1 = i_{1св} + i_{1np} = A_1e^{pt} + i_{1np};$$

$$i_1(0) = i_{1св}(0) + i_{1np} = A_1 + 1,8 = 2 \text{ A};$$

$$A_1 = 2 - 1,8 = 0,2 \text{ A}.$$

7. Определить ток, протекающий через индуктивность, который во время переходного процесса изменяется по закону:

$$i_1 = 0,2e^{-6,25t} + 1,8 \text{ A}.$$

8. Падение напряжения на индуктивности определить по закону электромагнитной индукции:

$$u_L = L \frac{di_1}{dt} = 2 \cdot \frac{d(0,2e^{-6,25t} + 1,8)}{dt} = 2 \cdot 0,2 \cdot (-6,25)e^{-6,25t} = -2,5e^{-6,25t} \text{ В.}$$

9. Остальные токи и падения напряжений определить по законам Ома и Кирхгофа:

$$u_{R_1} = i_1 \cdot R_1 = (0,2e^{-6,25t} + 1,8) \cdot 5 = 1e^{-6,25t} + 9 \text{ В;}$$

$$u_{12} = u_L + u_{R_1} = -2,5e^{-6,25t} + 1e^{-6,25t} + 9 = -1,5e^{-6,25t} + 9 \text{ В;}$$

$$i_2 = \frac{u_{12}}{R_2} = \frac{-1,5e^{-6,25t} + 9}{30} = -0,05e^{-6,25t} + 0,3 \text{ А;}$$

$$i = i_1 + i_2 = 0,2e^{-6,25t} + 1,8 - 0,05e^{-6,25t} + 0,3 = 0,15e^{-6,25t} + 2,1 \text{ А.}$$

Временные диаграммы токов во время переходного процесса изображены на рис. 51.

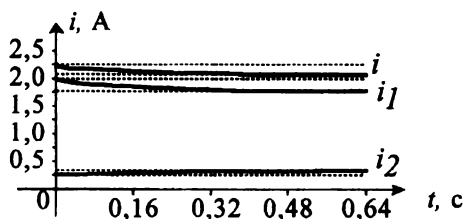


Рис. 51

10. Для определения зависимостей токов и напряжений от времени (временных диаграмм токов и напряжений) средствами пакета Electronics Workbench собрать схему, приведенную на рис. 52. Осциллограф – прибор, измеряющий напряжение, поэтому он подключается параллельно резистору, ток через который определяется. Кривая тока, протекающего через резистор, совпадает по форме с кривой падения напряжения на этом резисторе (изменяется только масштаб).

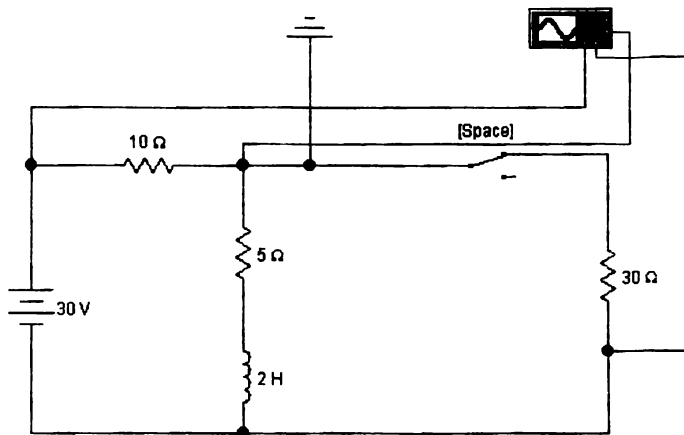


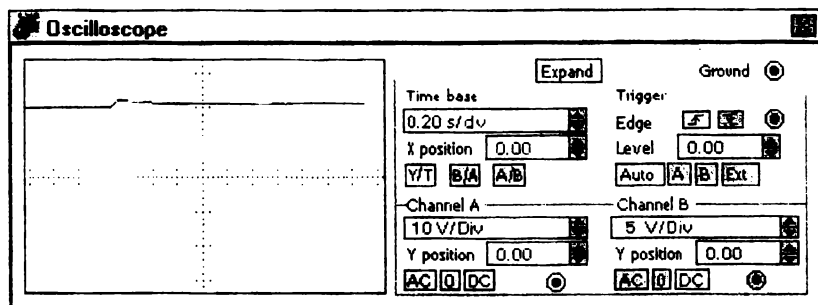
Рис.52

Осциллограмма тока в неразветвленной части цепи  $i$  приведена на рис. 53, *а* (масштаб по оси ординат для тока – 1 А/дел), тока  $i_1$  – на рис. 53, *б* (масштаб для тока – 1 А/дел), тока  $i_2$  – на рис. 53, *в* (масштаб для тока – 0,166 А/дел).

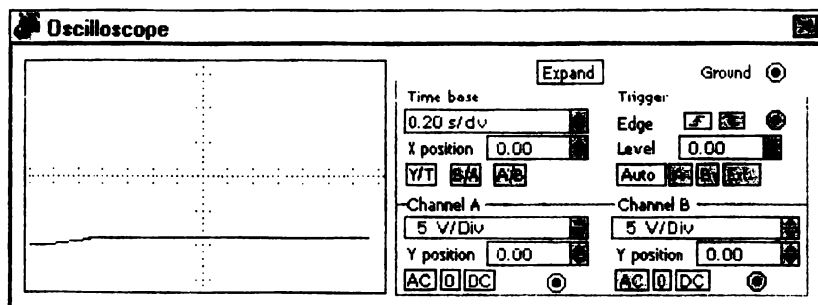
### Расчет переходных процессов в цепях, содержащих активное сопротивление и емкость

*Пример.* Для цепи известны: ЭДС источника  $E=120$  В, сопротивления  $R_1=R_2=250$  Ом,  $R_3=500$  Ом, емкость конденсатора  $C=10$  мкФ (рис. 54). Найти законы изменения во времени всех токов и напряжений (до коммутации в цепи был установившийся режим). Построить кривые измерения этих величин.

a



b



в

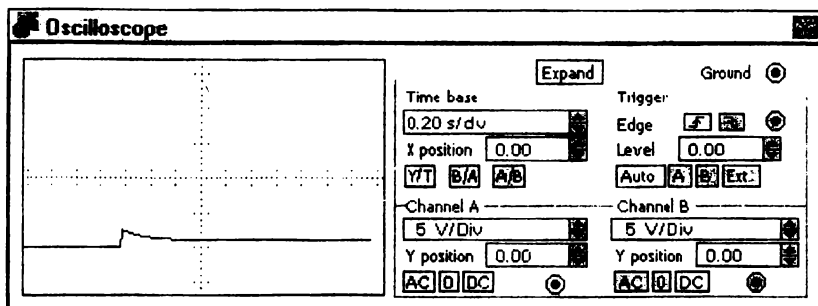


Рис. 53

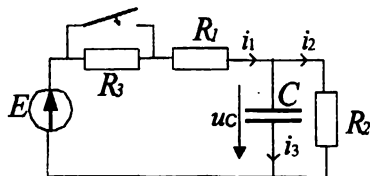


Рис. 54

*Решение:*

1. Рассчитать токи и напряжения в установившемся режиме до коммутации ( $t=0-$ ):

$$i_3(0-) = 0;$$

$$i_1(0-) = i_2(0-) = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{120}{250 + 250 + 500} = 0,12 \text{ A};$$

$$u_C(0-) = R_2 i_2(0-) = 250 \cdot 0,12 = 30 \text{ В}.$$

2. Токи и напряжения определить как суммы принужденной и свободной составляющих:

$$i_1(t) = i_{1np} + i_{1св};$$

$$i_2(t) = i_{2np} + i_{2св};$$

$$i_3(t) = i_{3np} + i_{3св};$$

$$u_C(t) = u_{Cnp} + u_{Cсв}.$$

3. Принужденные составляющие токов и напряжений определить из расчета установившегося режима после коммутации:

$$i_{3np} = 0;$$

$$i_{1np} = i_{2np} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{120}{250 + 250} = 0,24 \text{ A};$$

$$u_{Cnp} = i_{2np} R_2 = 0,24 \cdot 250 = 60 \text{ В}.$$

4. Составить характеристическое уравнение для послекоммуникационного режима:

$$Z(p) = R_1 + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{R_1 R_2 + \frac{1}{pC} \cdot R_1 + R_2 \cdot \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{CpR_1 R_2 + R_1 + R_2}{R_2 Cp} = 0;$$

$$CpR_1 R_2 + R_1 + R_2 = 0;$$

$$p = -\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} = -\frac{250 + 250}{10^{-5} \cdot 250 \cdot 250} = -800 \text{ с}^{-1}.$$

5. Найти свободные составляющие:  $i_{1\text{св}} = D_1 e^{pt}$ ;  $i_{2\text{св}} = D_2 e^{pt}$ ;  $i_{3\text{св}} = D_3 e^{pt}$ ;  $u_{C\text{св}} = D_C e^{pt}$ , где  $D_1, D_2, D_3, D_C$  – постоянные коэффициенты. Тогда искомые токи и напряжение будут иметь вид

$$i_1(t) = 0,24 + D_1 e^{pt};$$

$$i_2(t) = 0,24 + D_2 e^{pt};$$

$$i_3(t) = D_3 e^{pt};$$

$$u_C(t) = 60 + D_C e^{pt}.$$

6. Для определения постоянных коэффициентов рассмотреть токи и напряжения в момент переходного процесса, т.е. в момент  $t = 0$ :

$$i_1(0) = 0,24 + D_1;$$

$$i_2(0) = 0,24 + D_2;$$

$$i_3(0) = D_3;$$

$$u_C(0) = 60 + D_C.$$

• Согласно второму закону коммутации, напряжение на емкости не может измениться скачком, т.е.

$$u_C(0-) = u_C(0+) = u_C(0) = 30 \text{ В}.$$

Отсюда

$$u_C(0) = 30 = 60 + D_C; D_C = -30 \text{ В};$$

$$u_C(t) = 60 - 30e^{-800t} \text{ В}.$$

- По закону Ома,  $i_2(0)R_2 = u_C(0)$  (резистор  $R_2$  включен параллельно емкости  $C$ ). Соответственно

$$i_2(0) = \frac{u_C(0)}{R_2} = \frac{30}{250} = 0,12 \text{ А};$$

$$i_2(0) = 0,24 + D_2 = 0,12; D_2 = -0,12 \text{ А};$$

$$i_2(t) = 0,24 - 0,12e^{-800t} \text{ А}.$$

- По второму закону Кирхгофа, для послекоммутационной схемы

$$i_1(0)R_1 + u_C(0) = E.$$

Отсюда

$$i_1(0) = \frac{E - u_C(0)}{R_1} = \frac{120 - 30}{250} = 0,36 \text{ А};$$

$$i_1(0) = 0,24 + D_1 = 0,36 \text{ А}; D_1 = 0,12 \text{ А};$$

$$i_1(t) = 0,24 + 0,12e^{-800t} \text{ А}.$$

- Ток, протекающий через емкость, определим как

$$\begin{aligned} i_3 &= C \frac{du_C}{dt} = 10^{-5} \frac{d}{dt} (60 - 30e^{-800t}) = \\ &= 10^{-5} \cdot (-30) \cdot (-800)e^{-800t} = 0,24e^{-800t} \text{ А}. \end{aligned}$$

Временные диаграммы токов и напряжения на конденсаторе изображены на рис. 55.



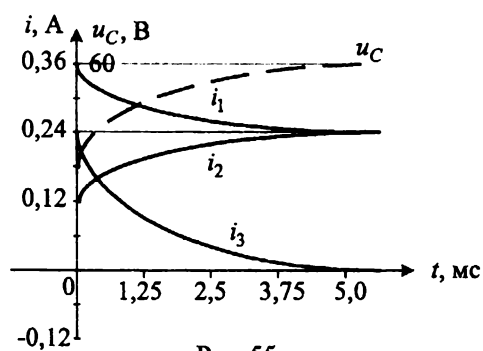


Рис. 55

На рис. 56 показаны схема для исследования переходного процесса в данной цепи и осциллограмма тока  $i_1$  (масштаб тока  $50/250=0,2$  А/дел).

а

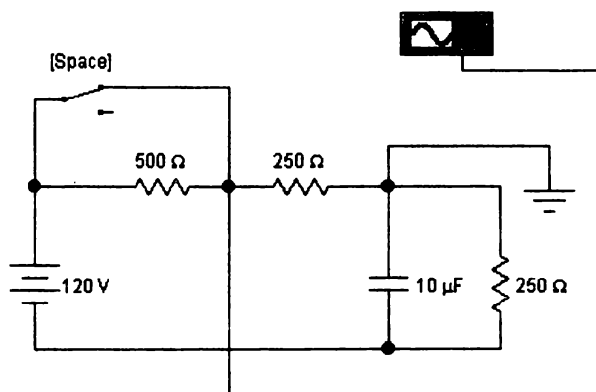


Рис. 56 (см. также с. 84)

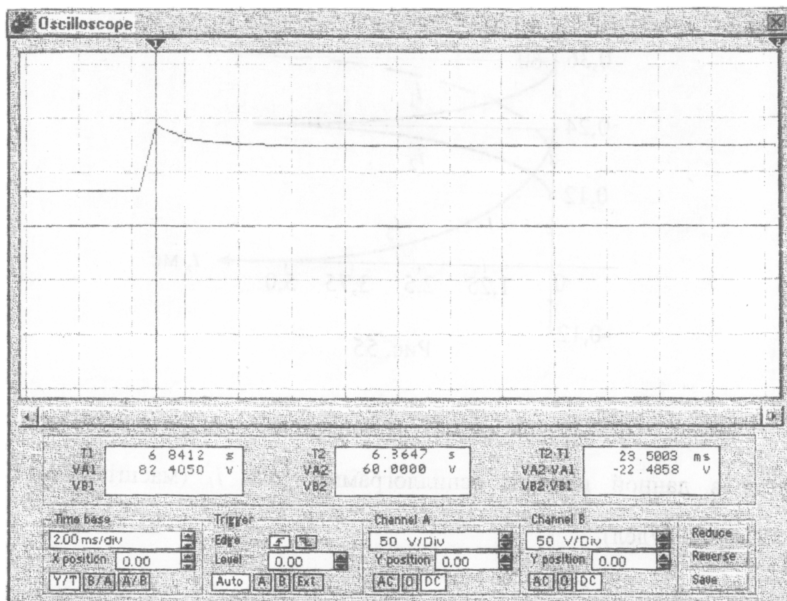


Рис. 56. Окончание

### Вопросы для самопроверки

1. Перечислить причины, способные вызвать возникновение переходного процесса в электрической цепи.
2. Что понимают под принужденными и свободными составляющими токов и напряжений?
3. Сформулировать первый и второй законы коммутации.
4. Изложить сущность классического метода расчета переходных процессов.

5. Пояснить способ составления характеристического уравнения электрической цепи.

6. Какие начальные условия являются независимыми, какие – зависимыми? Как они определяются?

7. Пусть в некоторой электрической цепи токи и напряжения в установившихся режимах до и после коммутации равны между собой. Будет ли в этой цепи протекать переходный процесс? Ответ пояснить.

8. Объяснить работу с осциллографом моделирующего пакета Electronics Workbench.

9. Как добиться возникновения переходного процесса в электрической цепи, смоделированной средствами пакета Electronics Workbench?

## *Литература*

### *Основная*

*Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учеб. для электротехн., энерг., приборостр. спец. вузов. – 9-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1996. – 638 с.

*Карлацук В.И.* Электронная лаборатория на IBM PC. Программа Electronics Workbench и ее применение. – М.: Солон-Р, 2000. – 503 с.

Контрольные задания по курсу «Компьютерное моделирование электронных устройств» / Сост. А.О. Прокубовская, Д.Б. Ченчик; Урал. гос. проф.-пед. ун-т. – Екатеринбург, 2001. – 23 с.

*Панфилов Д.И., Иванов В.С., Чепурин И.Н.* Электротехника и электроника в экспериментах и упражнениях: Практикум на Electronics Workbench: В 2 т. / Под общ. ред. Д.И. Панфилова. – М.: ДОДЭКА, 1999. – Т. 1: Электротехника. – 304 с.; Т. 2: Электроника. – 288 с.

### *Дополнительная*

Основы теории цепей: Учеб. для вузов. – 5-е изд., перераб. / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.

Сборник задач по теоретическим основам электротехники: Учеб. пособие для энергет. и приборостр. спец. вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. / Л.А. Бессонов, И.Г. Демидова, М.Е. Заруди и др.; Под ред. Л.А. Бессонова – М.: Высш. шк., 1988. – 543 с.

*Шебес М.Р.* Задачник по теории линейных электрических цепей. – М.: Высш. шк., 1982. – 456 с.

## **МОДЕЛИРУЮЩИЙ ПАКЕТ ELECTRONICS WORKBENCH**

### **Возможности Electronics Workbench**

Система схемотехнического моделирования Electronics Workbench предназначена для моделирования и анализа электрических схем. Она позволяет моделировать аналоговые, цифровые и цифро-аналоговые схемы большой степени сложности. Имеющиеся в программе библиотеки включают в себя большой набор широко распространенных компонентов; есть возможность подключения и создания новых библиотек компонентов.

Параметры компонентов можно изменять в широком диапазоне значений. Простые компоненты описываются набором параметров, значения которых можно изменять непосредственно с клавиатуры, активные элементы – с помощью модели, представляющей собой совокупность параметров и отображающей конкретный элемент или его идеальное представление. Модель выбирается из списка библиотек компонентов; параметры модели также могут быть изменены пользователем.

Широкий выбор приборов позволяет производить измерения различных величин, задавать входные воздействия, строить графики. Все приборы изображаются в виде, максимально приближенном к реальному, поэтому работать с ними просто и удобно.

Результаты моделирования можно вывести на принтер или импортировать в текстовый или графический редактор для дальнейшей обработки.

*Основные достоинства программы:*

1. Экономия времени. Работа в реальной лаборатории требует больших временных затрат на подготовку эксперимента. Электронная лаборатория Electronics Workbench позволяет сделать изучение электрических схем более доступным.

2. Достоверность измерений. В действительности не существует двух совершенно одинаковых элементов, т.е. все реальные элементы имеют большой разброс значений, что приводит к погрешностям в ходе проведения эксперимента. В данном пакете все элементы описываются строго установленными параметрами, поэтому каждый раз в ходе эксперимента будет повторяться результат, определяемый только параметрами элементов и алгоритмом расчета.

3. Удобство проведения измерений. Учеба невозможна без ошибок, а ошибки в реальной лаборатории порой очень дорого обходятся экспериментатору. При работе с Electronics Workbench экспериментатор застрахован от случайного поражения током, а приборы не выйдут из строя из-за неправильно собранной схемы. Помимо этого в распоряжении пользователя имеется такой широкий ассортимент приборов, который вряд ли будет доступен в реальной жизни.

4. Графические возможности. Сложные схемы занимают достаточно много места, изображение при этом стараются сделать более плотным, что часто приводит к ошибкам в подключении проводников и элементов цепи. Пакет позволяет разместить схему таким образом, чтобы были четко видны все соединения элементов и одновременно

вся схема целиком. Возможность изменения цвета проводников позволяет сделать схему более удобной для восприятия. Можно отображать различными цветами и графики, что очень удобно при одновременном исследовании нескольких зависимостей.

5. Обладание стандартным интерфейсом Windows. Программа Electronics Workbench использует стандартный интерфейс Windows, что значительно облегчает ее использование. Интуитивность и простота интерфейса делают программу доступной для всех, кто знаком с основами работы с Windows.

### **Библиотека компонентов и проведение экспериментов**

В библиотеку компонентов программы входят пассивные элементы, транзисторы, управляемые источники, управляемые ключи, индикаторы, логические элементы, триггерные устройства, цифровые и аналоговые элементы, специальные комбинационные и последовательные схемы. Активные элементы могут быть представлены моделями как идеальных, так и реальных элементов.

В программе используется большой ассортимент приборов для проведения измерений: амперметр, вольтметр, осциллограф, мультиметр, плоттер (графопостроитель), функциональный генератор, генератор слов, логический анализатор и логический преобразователь.

Electronics Workbench может проводить анализ схем на постоянном и переменном токах. При анализе работы электрической цепи на постоянном токе (режим DC) определяется рабочая точка схемы в установившемся режиме работы. Результаты этого анализа не отражаются на приборах, они используются для дальнейшего анализа схе-

мы. При анализе схем на переменном токе используют результаты анализа схем на постоянном токе для получения линеаризованных моделей нелинейных компонентов. Анализ схем в режиме АС может проводиться как во временной, так и в частотной областях. Программа также позволяет производить анализ цифроаналоговых и цифровых схем.

В Electronics Workbench можно исследовать переходные процессы при воздействии на схемы входных сигналов различной формы.

Electronics Workbench позволяет строить схемы различной степени сложности при помощи следующих операций:

- выбора элементов и приборов из библиотек;
- перемещения элементов и схем в любое место рабочего поля;
- поворота элементов и групп элементов на углы, кратные 90°;
- копирования, вставки или удаления элементов, групп элементов, фрагментов схем и целых схем;
- изменения цвета проводников;
- выделения цветом контуров схем для более удобного восприятия;
- одновременного подключения нескольких измерительных приборов и наблюдения их показаний на экране монитора;
- присваивания элементу условного обозначения;
- изменения параметров элементов в широком диапазоне.

Все операции производятся при помощи мыши и клавиатуры. Управление только с клавиатуры невозможно.

Путем настройки приборов можно:

- изменять шкалы приборов в зависимости от диапазона измерений;



- задавать режим работы прибора;
- задавать вид входных воздействий на схему (постоянные и гармонические токи и напряжения, треугольные и прямоугольные импульсы).

Графические возможности программы позволяют:

- одновременно наблюдать несколько кривых на графике;
- отображать кривые на графиках различными цветами;
- измерять координаты точек на графике;
- импортировать данные в графический редактор, что позволяет при необходимости преобразовать рисунок и вывести его на принтер.

## **Компоненты Electronics Workbench**

Для операций с компонентами на общем поле Electronics Workbench выделены две области: панель компонентов и поле компонентов (рис. 1П).

Панель компонентов состоит из пиктограмм полей компонентов, поле компонентов — из условных изображений компонентов. Щелчком мышь на одной из пиктограмм панели компонентов можно открыть соответствующее поле. Рассмотрим некоторые панели и их компоненты (таблица).

Работа с осциллографом обычно вызывает затруднения, поэтому рассмотрим ее более подробно.

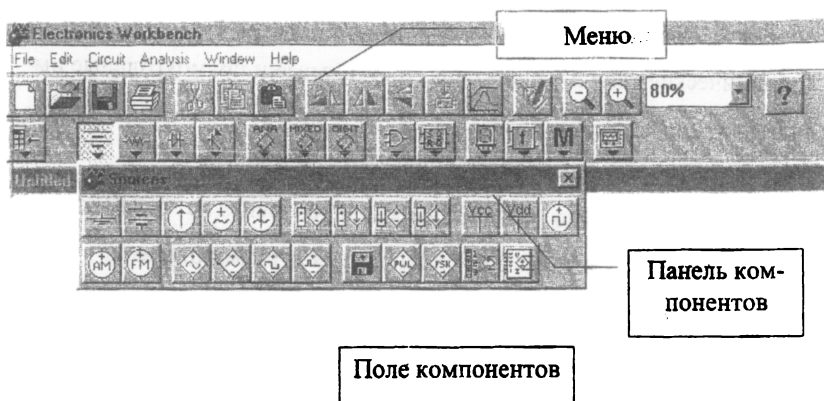


Рис. 1П

Осциллограф можно подключать к уже включенной схеме, а также во время работы схемы возможно переставить выводы осциллографа к другим точкам – изображение на экране осциллографа изменится автоматически.

На схему выводится уменьшенное изображение осциллографа, общее для обеих модификаций. На этом изображении имеется четыре входных зажима:

- верхний правый зажим – общий;
- нижний правый – вход синхронизации;
- левый и правый нижние зажимы – входы каналов А и В.

Двойным щелчком мыши по уменьшенному изображению открывается изображение передней панели простой модификации осциллографа с кнопками управления, информационными полями и экраном (рис. 2П).

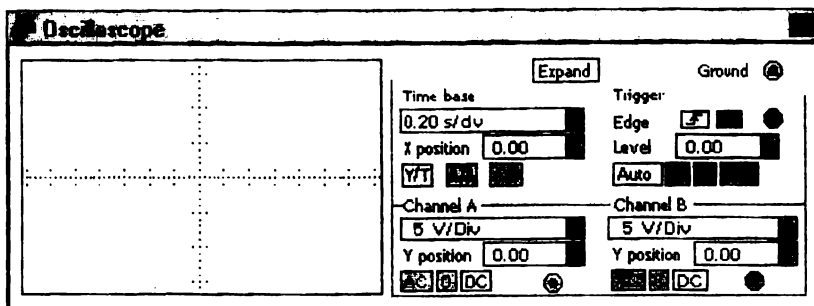


Рис. 2П








Для проведения измерений осциллограф нужно настроить, для чего следует задать:





- расположение осей, по которым откладывается сигнал;
- нужный масштаб развертки по осям;
- смещение начала координат по осям;
- режим работы по входу – закрытый или открытый;
- режим синхронизации – внутренний или внешний.

Настройка осциллографа производится при помощи полей управления, расположенных на панели управления.







Панель управления имеет общий для обеих модификаций осциллографа вид и разделена на четыре поля управления:

- поле управления горизонтальной разверткой (масштабом времени);
- поле управления синхронизацией (запуском);
- поле управления каналом А;
- поле управления каналом В.

Операционные области для работы с компонентами		
Панель	Компонент	Описание
1	2	3
 Источники питания	 Источник постоянного напряжения	ЭДС источника задается в вольтах. Внутреннее сопротивление источника равно нулю
	 Источник переменного напряжения	Действующее значение напряжения источника задается в вольтах. Имеется возможность установки частоты и начальной фазы
	 Заземление	Имеет нулевое напряжение, обеспечивает исходную точку для отсчета потенциалов. Обязательно заземляются схемы, содержащие операционный усилитель, трансформатор, управляемый источник, осциллограф
 Базовые элементы	 Соединяющий узел	Применяется для соединения проводников и создания контрольных точек. К каждому узлу можно подсоединить не более четырех проводников
	 Резистор	Сопротивление резистора измеряется в омах и задается производными величинами

1	2	3
	 Конденсатор	Емкость конденсатора измеряется в фарадах и задается производными величинами.
	 Катушка индуктивности (дроссель)	Индуктивность катушки измеряется в генри и задается производными величинами
	 Переменный резистор	Положение движка переменного резистора устанавливается при помощи специального элемента – стрелочки-регулятора. В диалоговом окне можно установить сопротивление, начальное положение движка (в процентах) и шаг приращения (в процентах). Имеется возможность изменять положение движка при помощи клавиш-ключей: для увеличения значения положения движка необходимо одновременно нажать [Shift] и клавишу-ключ, для уменьшения – клавишу-ключ
	 Ключ, управляемый клавишей	Может быть замкнут или разомкнут при помощи управляющих клавиш на клавиатуре. Имя управляющей клавиши можно ввести с клавиатуры в диалоговом окне, появляющемся после двойного щелчка мышью на изображении ключа

Окончание таблицы

1	2	3
 Библиотека индикаторов	 Вольтметр	<p>Используется для измерения переменного и постоянного напряжения. Двойным щелчком мыши на изображении вольтметра открывается диалоговое окно для изменения параметров вольтметра: вида измеряемого напряжения (АС – для переменного напряжения, DC – для постоянного), величины внутреннего сопротивления</p>
	 Амперметр	<p>Используется для измерения постоянного и переменного тока. Настройка аналогична вольтметру</p>
 Панель приборов	 Осциллограф	<p>Аналог двухлучевого запоминающего осциллографа, имеет две модификации – простую и расширенную</p>
	 Мультиметр	<p>Используется для измерения постоянного и переменного напряжения, тока, сопротивления, уровня напряжения в децибеллах</p>

Поле управления горизонтальной разверткой (масштабом времени) служит для задания масштаба горизонтальной оси осциллографа при наблюдении напряжения на входах каналов А и В в зависимости от времени. Чтобы получить удобное для наблюдения изображение на экране осциллографа, масштаб времени желательно установить таким образом, чтобы цена двух делений на горизонтальной оси была примерно равна величине, обратно пропорциональной частоте исследуемого сигнала, т.е. составляла бы период сигнала.

В этом же поле расположены кнопки Y/T, A/B, B/A, позволяющие задавать зависимости отображаемых сигналов. При нажатии на кнопку Y/T по вертикальной оси откладывается напряжение, по горизонтальной оси – время; при нажатии на кнопку A/B по вертикальной оси откладывается амплитуда напряжения на входе канала А, по горизонтальной – канала В; при нажатии на кнопку B/A – наоборот. При этом масштаб осей определяется установками соответствующих каналов.

Две нижних части панели осциллографа являются полями отображения сигналов, поданных на входы каналов А и В соответственно.

Нажатие клавиши EXPAND на панели простой модели открывает окно расширенной модели осциллографа (рис. 3П). Панель расширенной модели осциллографа расположена под экраном и дополнена тремя информационными табло, на которые выводятся результаты измерений.

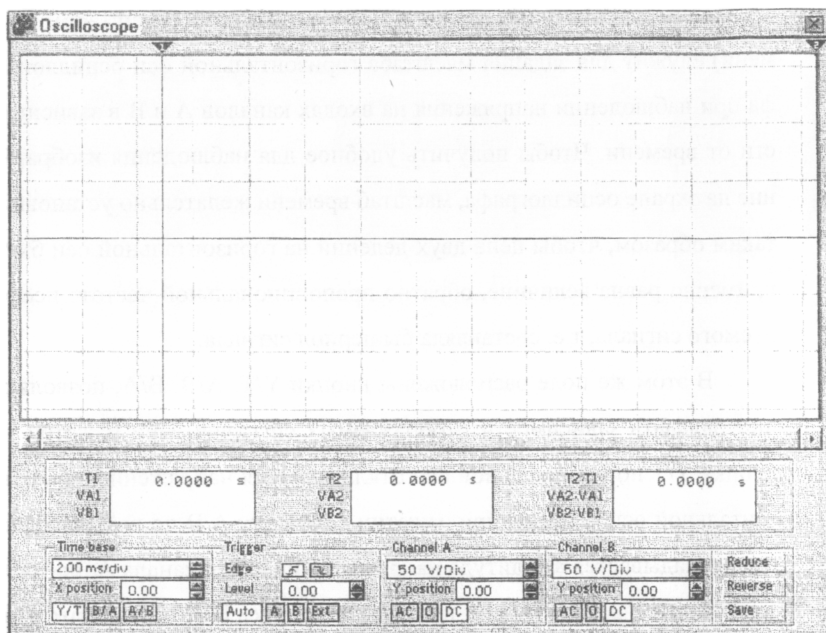


Рис. 3П

На экране осциллографа расположены два курсора, при помощи которых можно измерить мгновенные значения напряжений в любой точке осциллограммы. Результаты измерений можно записать в файл.

### Технология подготовки схем

Прежде чем создавать чертеж принципиальной схемы средствами программы EWB, необходимо на листе бумаги подготовить ее эскиз с примерным расположением компонентов и с учетом возможности оформления отдельных фрагментов в виде подсхем. Целесообразно также ознакомиться с библиотекой готовых схем программы для выбора аналога (прототипа) или использования имеющихся решений в качестве подсхем.



В общем случае процесс создания схемы начинается с размещения на рабочем поле EWB компонентов из библиотек программы в соответствии с подготовленным эскизом. Все разделы библиотеки программы EWB поочередно могут быть вызваны с помощью меню Window или с помощью иконок, расположенных на панели компонентов. Для открытия каталога нужной библиотеки необходимо подвести курсор мыши к соответствующей иконке и нажать один раз ее левую кнопку. Необходимый для создания схемы значок (символ) компонента переносится из каталога на рабочее поле программы движением мыши при нажатой левой кнопке, после чего кнопка отпускается (для фиксации символа) и производится двойной щелчок по значку компонента. В раскрывающемся диалоговом окне устанавливаются требуемые параметры (сопротивление резистора, тип транзистора и т.д.); выбор подтверждается нажатием кнопки Asserpt или клавиши Enter. На этом этапе необходимо предусмотреть место для размещения иконок контрольно-измерительных приборов.

После размещения компонентов производится соединение их выводов проводниками. При этом необходимо учитывать, что к выводу компонента можно подключить только один проводник. Для выполнения подключения курсор мыши подводится к выводу компонента и, после появления большой точки, нажимается левая кнопка. Появляющийся при этом проводник протягивается к выводу другого компонента до появления на нем такой же точки, после чего кнопка мыши отпускается, и соединение готово.

При необходимости подключения к этим выводам других проводников в библиотеке базовых элементов выбирается точка (соединяющий узел) и переносится на ранее установленный проводник. Чтобы точка почернела (первоначально она имеет красный цвет), не-

обходимо щелкнуть мышью по свободному месту рабочего поля. Если эта точка имеет электрическое соединение с проводником, то она полностью окрашивается черным цветом. Если на ней виден след от пересекающего проводника, то электрического соединения нет, и точку необходимо установить заново. После удачной установки к точке соединения можно подключить еще два проводника.

Если соединение нужно разорвать, курсор подводится к одному из выводов компонентов или точке соединения и при появлении площадки нажимается левая кнопка, проводник отводится на свободное место рабочего поля, после чего кнопка отпускается. Если необходимо подключить вывод к имеющемуся на схеме проводнику, то проводник от вывода компонента курсором подводится к указанному проводнику и после появления точки соединения кнопка мыши отпускается. Следует отметить, что прокладка соединительных проводников производится автоматически, причем препятствия — компоненты и другие проводники — огибаются по ортогональным направлениям (по горизонтали или вертикали). '

Если необходимо переместить отдельный сегмент проводника, к нему подводится курсор, нажимается левая кнопка и после появления в вертикальной или горизонтальной плоскости двойного курсора производятся нужные перемещения.

Подключение к схеме контрольно-измерительных приборов производится аналогично. Причем для таких приборов, как осциллограф, соединения целесообразно проводить цветными проводниками, поскольку цвет определяет цвет соответствующей осциллограммы.

Прокубовская Алла Олеговна, Окуловская Анастасия Георгиевна

Компьютерное моделирование электронных устройств

Учебное пособие

Ч.1. Моделирование электрических цепей

Редактор Н.М.Юркова

Печатается по постановлению редакционно-издательского совета  
университета

Лицензия ЛР N 040328 от 10.04.97

Подписано в печать ~~30.10.97~~ Формат 60x84/16. Бумага для множ.  
аппаратов. Усл. печ. л. 4,4. Уч.-изд. л. 4,7. Тираж 500 экз. Заказ *176*  
Издательство Уральского государственного профессионально-  
педагогического университета.  
Екатеринбург, ул. Машиностроителей, 11.  
Ризограф УГППУ. Екатеринбург, ул. Машиностроителей, 11.

